RESUME DU GUIDE VERT
LA CONSTRUCTION DU NOMBRE À L'ÉCOLE MATERNELLE
MENJ Guide vert, Août 2023, 130 pages

Questions fréquentes sur l'enseignement des premiers outils mathématiques

Les élèves qui arrivent en PS savent-ils compter ? Non, ils ne savent pas tous compter. La moitié d'entre eux savent donner 3 cubes quand on leur demande. Tous ont déjà fréquenté les nombres d'une manière implicite mais avec une maîtrise inégale. La recherche indique que les enfants auraient une compréhension intuitive de l'arithmétique simple.

Peut-on proposer, en PS, une situation mathématique impliquant six objetsalors que les élèves ne maîtrisent que les mots-nombres 1, 2 et 3 ? Oui, pour des comparaisons de collections. Ex : chaque élève a six assiettes et cinq fourchettes. La question porte sur l'égalité ou non des quantités des deux collections. Il ne faut pas qu'il reste des assiettes sans fourchettes ou inversement. Cette procédure de correspondance terme à terme n'implique pas de savoir dire la quantité de fourchettes ou d'assiettes.

Doit-on systématiquement faire compter le nombre de présents par les élèves ? Non. « Systématiquement » fait référence à un rituel. Une activité ritualisée est une activité proposée régulièrement pendant une période de l'année. Elle est en lien avec une séquence d'apprentissage au cours de laquelle les élèves ont manipulé du matériel, expérimenté des procédures, les ont verbalisées. Oui, si cela répond à un apprentissage précis. Le focus « *Décomposer et composer les nombres jusqu'à 10 : un ex. de mise en œuvre des modalités spécifiques d'apprentissage de l'école maternelle* » présente une activité ritualisée : dénombrer les élèves absents afin de travailler sur de petits nombres. La possibilité de proposer cette activité au-delà de 4 absents dépend de la progression atteinte sur le nombre en tant que quantité. Cette activité peut être pertinente si elle est utilisée pour travailler la comptine numérique, notamment en MS. Si le principe cardinal est acquis, les élèves peuvent comprendre que l'on compte jusqu'à 21 et que l'on dise il y a 21 présents.

Pourquoi, lorsque l'on demande à un élève combien il y a d'éléments dans une collection, énonce-t-il la comptine des nombres sans répondre par un mot-nombre comme attendu par la question « combien ? » Cet élève ne semble pas avoir construit la notion de quantité liée à la cardinalité du nombre. Le nombre n'est pas encore totalement un indicateur de la quantité. Brissiaud (1991) explique cela en distinguant le comptage-numérotage et le comptage-dénombrement. Parmi les élèves qui comptent les jetons du premier jusqu'aux huitième dans une collection de 8 jetons, certains attribuent un nom de nombre à chaque jeton sans que ce nom exprime le nombre de jetons. Ils ont compté jusqu'à huit mais cela ne signifie pas pour eux qu'il y a huit jetons dans la collection et que ce huit exprime une quantité bien précise. Ils ont effectué un comptage-numérotage. Pour d'autres élèves, huit exprime bien une quantité, c'est-à-dire que, pour eux, toutes les collections de huit objets ont autant d'objets, la même quantité, le même nombre. Ces élèves ont effectué un comptage-dénombrement. Pour inciter au comptage dénombrement, le PE peut insister pour que les élèves mettent en lien les noms des nombres et le dénombrement : « *un jeton, et encore **un** jeton, ça fait **deux** jetons, et encore un jeton, ça fait **trois** jetons… et encore un jeton, ça fait **hui**t jetons* ».

Les enfants comptent avec leurs doigts, est-ce une bonne chose ? Oui. Le comptage sur les doigts est une étape pour accéder au comptage verbal. Cette transition est progressive et dépend principalement de la capacité de l'enfant à contrôler mentalement le déroulement du calcul et à conserver une trace de ce qui a été et de ce qui reste à compter. Les élèves utilisent plusieurs stratégies, la première en partant de 1 3+4 = 1,2,3,4,5,6,7, la seconde à partir du premier terme de l'opération, 3,4,5,6,7 et peu à peu à partir du nombre le plus grand, 4, 5, 6,7.

Peut-on proposer des situations de résolution de problèmes dès la PS ? Oui. La confrontation à des résolutions de problèmes constitue une des quatre modalités d'apprentissage de la maternelle. Les problèmes arithmétiques des programmes portent sur des nombres en tant que quantité (composition de deux collections, ajout ou retrait à une collection, produit ou partage) ou sur des nombres en tant que position (déplacements en avant ou en arrière). Il est nécessaire d'avoir déjà acquis l'utilisation de ces nombres en tant que quantité ou position avant de proposer ces problèmes arithmétiques.

Comment différencier son enseignement de la construction du nombre ? La différenciation repose sur une évaluation fine des progrès et des acquis des élèves. L'enseignant planifie, régule et différencie les activités qu'il propose aux groupes d'élèves en variant notamment la taille des collections, le fait de pouvoir agir directement ou non sur les objets (les déplacer, les manipuler ou non), le fait d'avoir à anticiper la réponse lorsque les objets sont éloignés ou dissimulés, le fait d'être contraint à formuler oralement ou par écrit la quantité d'objets à aller chercher. Ces variables importantes amènent progressivement les élèves à faire évoluer leurs procédures et à construire les savoirs attendus.

Introduction

Durant les trois années de l'école maternelle, en plus des autres compétences mathématiques, l'élève acquiert les bases essentielles sur le nombre, les quantités, les opérations simples et apprend à utiliser ses connaissances en résolvant des problèmes. À la fin de la GS, l'enfant doit décomposer et recomposer des quantités jusqu'au moins 10 et connaître la comptine jusqu'au moins 30. Il résout des problèmes, anticipe des positions qui seront atteintes après un déplacement. L'enfant donne le nombre d'objets d'une collection après augmentation, diminution, partage équitable…
L'école maternelle lutte contre les inégalités en permettant à tous les enfants, dès trois ans, d'évoluer dans un environnement sécurisant qui tient compte de leurs besoins pour favoriser leur développement et leurs apprentissages. Les compétencesmathématiques acquises à la maternelle sont essentielles pour se projeter avec confiance dans les apprentissages fondamentaux de l'école élémentaire.
La fréquentation des mathématiques s'effectue de manière quotidienne et toutes les occasions doivent être saisies pour mobiliser, développer et renforcer les habiletés mathématiques. Il s'agit de définir précisément des objectifs d'apprentissage. Les derniers résultats de la recherche préconisent une mise en œuvre pédagogique progressive et structurée qui repose sur une combinaison réfléchie et alternée des formes et de modalités d'enseignement en classe entière, en groupes ou individuelles. L'évolution du programme de l'école maternelle (2021) s'inscrit dans la continuité des avancées de la recherche et précise que l'enseignement des premiersoutils mathématiques « *s'attache à stimuler chez les élèves la curiosité, le plaisir et le goût de la recherche* » (Domaine 4).
Le présent guide porte sur un des objets fondamentaux des premiers outils mathématiques : la construction du nombre. Il s'adresse aux enseignants comme aux formateurs. Son objectif est de faire connaître les derniers éléments de la recherche en didactique des mathématiques, notamment sur la pluralité des processus en jeu dans la construction du nombre à l'école.

I. DÉVELOPPEMENT COGNITIF ET APPRENTISSAGE PREMIER DE LA NUMÉRATION

Les résultats de la recherche en psychologie cognitive sur les apprentissages numériques au cours de la petite enfance montrent que les enfants possèdent dès la naissance des représentations mentales qui pourraient constituer la base sur laquelle les apprentissages formels en maternelle viendront se greffer. Lorsque l'enfant parvient à associer symboles numériques (mots-nombres et chiffres arabes) et quantités, il a construit le « sens » du nombre (Dehaene, 2010), ce qui lui permettra d'asseoir ses apprentissages numériques et mathématiques ultérieurs.

En route vers l'abstraction : progressivité des apprentissages numériques

Un sens précoce des quantités

Les enfants entrent à l'école maternelle avec des intuitions sur les nombres et les quantités, dont certaines sont déjà présentes dès les tout premiers mois de vie. A la naissance, les bébés distinguent des collections de quatre éléments de collection de douze éléments, des collections de six et de dix-huit, ou de trois et de neuf (Coubart *et al*., 2014).

Un sens précoce du calcul

Les nourrissons sont capables d'effectuer des opérations sur des collections d'objets. Par ex., dans une étude effectuée à l'université de Yale, des chercheuses ont montré des animations à des enfants de six mois (McCrink, Wynn, 2004). Dans un problème d'addition, le bébé voyait d'abord un premier ensemble de cinq objets se cacher derrière un écran opaque, suivi par un deuxième ensemble de cinq objets. L'écran se soulevait alors pour révéler, selon les cas, dix objets (résultat attendu) ou cinq objets (résultat erroné). D'autres animations mettaient en scène des soustractions, toujours à l'aide

d'objets se cachant derrière des écrans opaques. Les résultats montrent que les nourrissons réagissent quand on leur présente des résultats erronés : cela démontre qu'ils se forment des attentes par rapport au nombre d'objets présents derrière les écrans lorsqu'ils visionnent les animations. D'autres études montrent que les nourrissons sont capables de calculer des proportions entre deux nombres (McCrink, Wynn, 2007). Outre leur capacité à percevoir les nombres, les nourrissons sont capables de les manipuler pour effectuer des calculs. Il s'agit dans tous les cas de calculs approximatifs. En effet, si par exemple, pour l'addition 5 + 5 décrite ci-dessus, les enfants rejettent un résultat de type 5 + 5 = 5, ils sont prêts à accepter 5 + 5 = 8 ou 5 + 5 = 12.
Ces intuitions sur les calculs sont toujours présentes chez les enfants, lorsqu'ils sont en âge d'aller à l'école maternelle. Lorsqu'on leur demande d'effectuer des additions et des soustractions sur des collections d'objets, les jeunes enfants sont tout à fait capables de savoir où se trouve le plus d'objets (Barth *et al*., 2005).
En GS, les enfants sont capables de faire le même genre de calculs approximatifs avec des symboles (Gilmore, McCarthy, Spelke, 2007). On peut, par ex., leur soumettre la question suivante : « Léa a vingt-huit billes, on lui en donne douze de plus. Arthur a trente billes. Qui a le plus de billes ? » Si les nombres sont assez distants, les enfants peuvent trouver la réponse à ce genre de problèmes simples. Dès que les enfants parviennent à associer nombres et quantités, les symboles numériques héritent de toutes les propriétés intuitives des quantités. Les enfants sont donc capables d'effectuer mentalement des calculs approximatifs avant même qu'on ne leur enseigne les règles des opérations arithmétiques.
Pour ce qui est de la perception, les petits et les grands nombres ne font pas appel aux mêmes systèmes cognitifs (Feigenson, Dehaene, Spelke, 2004). On retrouve cette dissociation à tous les âges. Chez l'adulte comme chez l'enfant, les petites quantités (de 1 à 3, parfois même 4) sont perçues de manière précise et immédiate : c'est ce que l'on appelle la « *subitisation* » (ou subitizing en anglais). D'un point de vue cognitif, la perception des petites quantités ne repose pas sur un système de traitement des collections dans leur ensemble, mais sur le traitement en parallèle d'un nombre limité d'objets. C'est ce traitement au niveau de l'objet qui permet à la perception d'être exacte, contrairement à ce qu'il se passe dans le domaine des grandes collections.
Ces différences de traitement permettent d'expliquer certains résultats. Alors que les nourrissons parviennent aisément à faire abstraction des propriétés des objets pour de grandes collections, lorsqu'on leur présente un petit nombre d'objets, ils ont tendance à s'intéresser aux objets eux-mêmes sans nécessairement prêter attention à la quantité (Feigenson, Carey, 2005). Les nourrissons peuvent avoir des difficultés à passer d'un traitement de type petite quantité à un traitement de type grande quantité (Hyde, 2011). À l'heure actuelle, on ne sait pas exactement quand et comment ces difficultés se résorbent. Il se pourrait qu'apprendre à utiliser le pluriel et lesingulier au niveau du langage aide les très jeunes enfants à créer des relations entre les représentations des petites et des grandes quantités (Barner *et al*., 2007).

L'apprentissage des mots nombres

Avant même l'entrée en maternelle, les enfants sont capables de compter. Si on leur donne quelques objets à compter, ils récitent les nombres dans l'ordre, en pointant vers les objets qu'on leur a demandé de compter. Néanmoins, pendant longtemps ; les enfants ne comprennent pas la signification de cette activité ; il ne s'agit que d'une comptine de plus, comme « am-stram-gram » (Carey, 2004). Les chercheurs ont remarqué ce décalage en proposant de nouvelles «situations-problèmes» aux enfants : des situations dans lesquelles une demande explicite de compter n'est pas formulée, mais qui peuvent être résolues par comptage. Par ex. la tâche «*donne-moi N*». L'enfant dispose d'un certain nombre de jouets, tous identiques (ex des poissons). L'expérimentateur lui demande de donner un nombre d'objets particulier : «*donne-moi trois poissons*». Les nombres d'objets demandés sont accessibles aux enfants dans la mesure où ils peuvent réciter les nombres jusqu'à 3, et même au-delà. Les questions «*donne moi 1*», «*donne moi 2*» ou «*donne moi 3*» sont correctement traités par la moitié des élèves de 36 mois, qui est l'âge moyen d'entrée en PS (Sarnecka, Goldman, Slusser, 2015).
Les recherches utilisant la tâche «*donne-moi N*» ont montré que les enfants apprennent le sens des premiers nombres un par un et dans l'ordre. Ainsi, à quelques exceptions près, les enfants avant 30 mois ne comprennent aucun nombre : ce qu'ils donnent ne correspond pas à ce qui est demandé par l'expérimentateur, même lorsque l'expérimentateur demande «*un*». Quelques mois plus tard, les enfants ont appris le sens du mot «*un*» : si on leur demande «*un poisson*», ils en donnent effectivement 1, et

pour toute autre demande, ils donnent un nombre de poissons au hasard, mais supérieur à 1. Ensuite, entre 3 ans et 3 ans ½, les enfants apprennent le mot «*deux*» : ils peuvent alors donner un ou deux objets, mais pas trois ni plus. Entre 3 ans 1/2 et 4 ans, viennent les mots «*trois*» et «*quatre*»; c'est alors que se met en place un apprentissage majeur. Lorsque l'enfant est capable de donner «*cinq*», il devient capable de donner les quantités qui se trouvent dans sa liste de comptage, et, contrairement aux enfants plus jeunes, il utilise spontanément le comptage pour produire un certain nombre d'objets. À ce moment-là,**l'enfant a compris un aspect essentiel du comptage : le fait que le dernier mot énoncé représente le nombre d'éléments de l'ensemble (le «*principe de cardinalité*»). Pour les enfants qui ont effectué cet apprentissage, on parle de <u>comptage-énumération</u>, pour distinguer cette étape de celle du <u>comptage- récitation</u>.**

Cette étape d'entrée dans l'énumération est fondamentale. Il a été montré que les apprentissages ultérieurs en mathématiques dépendent non de l'âge biologique, mais de l'âge auquel l'enfant a réussi à entrer dans l'énumération (Geary *et al.*, 2017). D'autres recherches se sont efforcées de déterminer quelles compétences dépendent de cette étape. C'est le cas de la compréhension du rapport entre les mots de nombre et la correspondance un à un. Lorsqu'on demande aux enfants de reproduire une collection, les plus jeunes reproduisent les quantités de manière approximative ; **seuls les enfants qui sont entrés dans l'énumération s'appliquent à aligner leurs objets avec ceux du modèle (Schneider *et al.*, 2022). Seuls les enfants qui comprennent le comptage-énumération sont capables de juger que, si on place deux collections l'une en face de l'autre en situation de correspondance un à un, ces deux collections correspondent au même mot nombre (Sarnecka, Gelman, 2008).**

Il paraît donc important d'accompagner les enfants pour qu'ils parviennent à entrer dans l'énumération au plus tôt. Mais comment faire? À notre connaissance, aucune recherche n'a encore à ce jour réussi à prouver l'efficacité d'une méthode d'enseignement. Il est certain que la scolarisation et la richesse de l'environnement dans lequel les enfants grandissent ont un effet déterminant sur leur entrée dans l'énumération. Aux États-Unis, on constate unécart de deux ans sur cet apprentissage entre les enfants des milieux très défavorisés (qui n'ont pas accès à l'école maternelle, payante) et les enfants des milieux aisés, scolarisés (Sarnecka, Negen, Goldman, 2018). Sans que l'on sache exactement quelles sont celles qui sont les plus efficaces, l'école maternelle joue un rôle essentiel pour permettre aux enfants d'entrer dans le comptage, et donc, dans la compréhension du nombre.

<u>Peut-on comprendre les nombres si on ne dispose pas de mots pour les nommer</u> ?

Des recherches (Pica et *al*, 2004, Frank *et al*, 2008 et Spaepen *et al*, 2011) se sont intéressées à des personnes nées sourdes n'ayant pas bénéficié d'une scolarisation ni d'un environnement en langue des signes. Leur résultat est identique : les personnes parviennent à manipuler des quantités approximatives, même si elles ne disposent pas de mots pour nommer ces quantités. En revanche, elles ne parviennent pas à résoudre des exercices portant sur les quantités exactes. Première hypothèse : le langage jouerait un rôle fondamental pour accéder à certains concepts. Peut-être serait-il nécessaire de disposer de mots nombres et d'une procédure de comptage pour parvenir à comprendre l'idée que les nombres sont des quantités exactes, à l'unité près. En effet, si on a beaucoup de graines, et qu'on ajoute une seule graine, alors le nombre change mais comme ce changement n'est pas perceptible, peut-être est-il difficile à saisir. Si cette hypothèse sur le rôle du langage est juste, alors les enfants de maternelle pourraient, eux aussi, avoir besoin d'apprendre cette notion de nombre exact, différente de la notion de nombre approximatif, innée. Deuxième hypothèse : le langage jouerait un rôle moins important. L'idée que les nombres peuvent être définis de manière exacte serait accessible à tous les êtres humains, de manière spontanée, quelle que soit leur culture et la langue qu'ils parlent; le langage et le comptage seraient simplement des outils utiles pour résoudre certaines tâches. On peut tout à fait imaginer que des personnes savent qu'il existe une réponse exacte à la question posée, mais qu'ils n'ont pas les moyens de parvenir à cette réponse, en l'absence d'une procédure de comptage. Si cette deuxième hypothèse est juste, alors l'obstacle rencontré par les enfants de maternelle est de nature différente : ils posséderaient bien le concept de nombre exact, sans toutefois pouvoir articuler les outils propres à leur culture (comptage, mots et symboles pour les nombres) avec ce concept.

Le comptage sur les doigts

L'utilisation des doigts pour compter et calculer est un outil efficace de résolution de petites opérations

en maternelle (Thevenot, 2022; Dupont-Boime, Thevenot, 2018). Lorsque l'enfant représente une collection d'objets sur ses doigts, il effectue un premier pas vers l'abstraction puisqu'il admet qu'une même quantité peut être représentée par différents moyens (Sinclair, Pimm, 2015).
Une collection de trois petites voitures peut ainsi être représentée par trois doigts levés. La configuration de doigts levés a d'ailleurs un double statut, analogique et symbolique. Chacune des trois petites voitures est représentée par chacun des trois doigts levés, d'où le caractèreanalogique de la collection de doigts. Cependant, ces trois doigts levés constituent aussi un symbole puisque la configuration de doigts levés est déterminée culturellement. En effet, alors que nos voisinsbritanniques lèvent l'annulaire, le majeur et l'index pour représenter trois, les Français lèvent plutôt le pouce, l'index et le majeur. Ces codes culturels permettent une lecture directe du nombre représenté sans nécessiter de comptage des doigts (Thevenot, 2014). Les doigts pourraient donc constituer un outil de transition entre des codes analogiques de représentation des quantités et les codes purement symboliques que constituent les mots-nombres et les chiffres arabes(Fayol, Seron, 2005; Andres *et al.*, 2008). Le calcul sur les doigts constitue également un outil qui pourrait permettre aux enfants de se détacherde supports matériels pour résoudre des opérations mentalement (Baroody, 1987; Poletti *et al.*, 2022). Dans un premier stade développemental, les enfants modélisent les deux quantités d'un problème sur leurs doigts avant de les rassembler. Par ex., 4 + 3, les enfants lèvent quatre doigts sur une main, trois sur l'autre et dénombrent un par un tous les doigts levés à partir de un. Cette étape de modélisation est suivie d'une étape de transition au cours de laquelle les enfants lèvent les doigts pour modéliser le premier terme d'une addition et poursuivent leur processus d'énumération tout en représentant le deuxième terme de l'addition sur leurs doigts. Pour 4 + 3, l'enfant lève quatre doigts sur une main pour 4 puis continue dans un processus unique d'énumération, cinq, six, sept tout en levant successivement un doigt, deux doigts puis trois doigts sur l'autre main. Cette étape pourrait permettre à l'enfant de se diriger vers une stratégie de surcomptage consistant en la représentation mentale d'un opérande à partir duquel le deuxième terme de l'addition est ajouté (quatre dans la tête puis, cinq, six, et sept sur trois doigts levés consécutivement dans notre ex.). L'enfant qui conçoit qu'un terme de l'addition peut être représenté purement mentalement pourrait ainsi concevoir que deux termes de l'addition peuvent être représentés mentalement et ainsi se défaire de la nécessité de supports externes pour accomplir ses calculs (Baroody, 1987).

L'apprentissage des chiffres

Lorsque l'enfant s'affranchit de la nécessité d'aides externes comme des objets manipulables ou ses doigts, il doit se servir de symboles sous la forme de mots-nombres ou de chiffres écrits pour traduire mentalement les quantités concrètes. Il a été montré qu'à l'âge de cinq ans, les enfants sont capables de traduire des quantités représentées sous forme analogique (collections de points) en mots nombres et chiffres arabes ainsi que de transcoder des mots-nombres en chiffres arabes. À quatre ans cependant, alors que le transcodage de points en symboles est en général réalisé aisément par les enfants, ils éprouvent encore des difficultés pour transcoder les mots-nombres en chiffres arabes. Finalement, les chercheurs concluent que les enfants devraient tout d'abord apprendre à associer des mots-nombres à des collections d'objets, puis devraient associer des nombres écrits en chiffres à ces mêmes collections avant d'apprendre la correspondance entre mots-nombres et nombres écrits en chiffres (Benoit *et al.*, 2013). Pour les aider à faire ces associations, ou en d'autres termes pour que les codes symboliques se greffent correctement sur les représentations non-symboliques et qu'enfin les deux codes symboliques s'associent l'un à l'autre, des activités dans lesquelles les nombres sont représentés dans les trois formats sont très utiles (Brankaer, Guesquière, De Smedt, 2015 pour un ex. avec un jeu de dominos). Les jeux de plateau tels que le jeu de l'oie, le jeu serpents et échelles, ou autres dans lesquels les enfants doivent compter le nombre de points sur des dés ou associer des quantités d'objets aux nombres de points sur les dés, s'avèrent très appropriés. Ces jeux impliquent également de déplacer son pion d'un certain nombre de cases sur le plateau et l'enfant peut ainsi articuler les propriétés cardinales et ordinales des nombres. Des activités et jeux dans lesquels les trois codes, verbal, visuel et analogique (Dehaene, 1992) sont mis en correspondance facilitent leurs articulations et permettent aux enfants de construire et consolider le sens du nombre. (Dehaene, 2010).

Progression des compétences numériques en maternelle en France

Des recherches menées en France (Courtier *et al.*, 2021; Darnon, Fayol, 2021; Girard *et al.*, 2023;

Mazens, Croset, 2023; Thomas *et al*., 2021) ont mesuré les performances des enfants dans différentes épreuves numériques. Cela permet de dresser un tableau de l'évolution des compétences au cours des 3 années d'école maternelle. Les résultats ci-dessous sont des résultats moyens et ne font donc pas apparaître les grandes différences qui existent entre les enfants : activités numériques que l'enfant pratique ou non à la maison, activités qui sont privilégiées par l'enseignant en classe.
Tableau p. 22.

Comment favoriser les apprentissages numériques ?

Greffer les symboles sur les intuitions de quantité

Les intuitions des enfants sur les quantités, présentes dès la naissance, constituent un socle sur lequel l'apprentissage des mathématiques peut s'appuyer. Chez l'être humain, les compétences numériques ne font jamais abstraction complète de la capacité que nous avons à percevoir et manipuler des ensembles concrets. Certaines opérations arithmétiques reposent sur ces capacités, comme la soustraction, que l'on n'apprend pas sous forme detable, et que l'on résout en manipulant mentalement des quantités.
Il paraît donc important de renforcer ces intuitions sur les quantités, afin de permettre aux enfants de construire leurs habiletés mathématiques sur un socle solide. Néanmoins, cela n'est pas suffisant, comme l'illustre une recherche menée récemment en Inde par une équipe de chercheurs internationale, sur un très grand échantillon d'enfants (Dillon *et al*., 2017). Les chercheurs ont travaillé avec une association qui offre des cours à des enfants des rues, avant qu'ils n'entrent dans la scolarité obligatoire (équivalent CP). Au cours de ces séances, les enfants jouent à des jeux numériques portant uniquement sur des ensembles concrets. Ils doivent par ex. comparer des ensembles de points, ou déplacer un pion de 1, 2, ou 3 cases sur un plateau après avoir tiré une carte qui montre 1, 2 ou 3 points. Les résultats ont montré que ces activités avaient des effets bénéfiques sur la perception des quantités, par rapport à un groupe contrôle qui jouait à des jeux non numériques. Cependant, ces effets s'estompent assez rapidement et ne donnent pas lieu à de meilleurs résultats en mathématiques en CP.
Si la manipulation de quantités peut aider les enfants à asseoir leurs apprentissages sur un socle intuitif solide, il semble nécessaire de travailler également le lien entre les quantités et les symboles (mots-nombres, chiffres), dès le plus jeune âge. Pour aller dans ce sens, quelques résultats de recherche récents montrent que les enfants qui comprennent le mieux les symboles numériques montrent, quelques mois plus tard, une meilleure perception des quantités (Mou, Zhang, Hyde, 2022) : apprendre à manipuler des symboles numériques aiderait donc les enfants à affiner leur perception des quantités numériques et leurs intuitions sur les quantités.

Apprendre en s'exerçant pour développer des automatismes

Il est très important que les élèves répètent souvent les mêmes activités afin d'automatiser leurs réflexions et comportements. Cette automatisation permettra aux élèves d'utiliser cette base pour entrer dans des activités de plus en plus complexes. Les activités automatisées sont conduites sans que les élèves n'aient à déployer de grands efforts cognitifs pour les mener à terme. Les ressources cognitives ainsi libérées peuvent être allouées à des activités de plus haut niveau. Par ex., les élèves qui doivent dénombrer une collection d'objets seront ralentis et gênés dans cette activité s'ils n'ont pas encore automatisé la production des premiers mots-nombres de la chaîne numérique verbale. Plus l'élève parvient à convoquer facilement et rapidement cette séquence numérique, plus il pourra consacrer de ressources cognitives à l'activité de dénombrement. Un élève peut avoir mémorisé une information sans que sa trace ne soit assez forte pour être récupérée facilement. Ainsi, plus la comptine numérique sera répétée et travaillée en classe, plus la probabilité d'une récupération automatique, sans effort, sera grande.
La récupération d'information en mémoire n'est pas le seul automatisme permettant aux élèves d'économiser des efforts cognitifs. La répétition de l'activité sera aussi la clef pour cette automatisation, mais le but du PE sera de faire exécuter une action ou une séquence d'actions sans que l'élève n'ait à mobiliser de coûteuses ressources cognitives. L'élève ne récupérera pas une connaissance spécifique en mémoire, mais une procédure abstraite d'exécution ou de résolution pouvant s'appliquer à divers contenus. Par ex., lorsque l'élève doit effectuer une addition simple en maternelle, on peut lui apprendre à représenter les termes de l'addition sur chacune des mains avant de

dénombrer ses doigts un par un. Un entraînement à cette stratégie pendant six séances réparties sur deux semaines, a permis à des élèves de cinq ans d'améliorer leurs performances en addition de manière significative (Poletti *et al.*, 2022b). L'entraînement quotidien permet aux élèves de reconnaître les problèmes qui peuvent être résolus grâce à une procédure rapide et efficace car automatisée.

Favoriser l'apprentissage des nombres grâce aux jeux

Le jeu occupe une place très importante dans la vie de l'enfant. Pour favoriser l'acquisition du nombre, il important d'utiliser les jeux comme support. Les jeux auxquels les élèves de maternelle s'adonnent spontanément sont plutôt des jeux symboliques, de «*faire semblant*», ou encore des jeux de motricité. L'enseignant peut proposer des jeux dits de société ou jeux à règles à condition que celles-ci soient accessibles. Si le jeu est une source de motivation importante chez l'enfant, cette modalité ne sera efficace que si elle remplit certaines conditions, notamment celle de s'inscrire dans une séquence choisie par l'enseignant, avec un objectif d'apprentissage ou de réinvestissement déterminé.
Peu de jeux ont réellement donné lieu à une évaluation quant à leur efficacité, mais on peut supposer que les jeux faisant appel à différentes représentations des nombres permettent de renforcer les capacités de l'enfant à passer d'un code à un autre (ex : constater combien il y a d'objets par un mot-nombre, lire àvoix haute un nombre écrit en chiffres, reconnaître les constellations d'un dé, etc.).
Un jeu de plateau dérivé du classique jeu de l'oie a donné lieu à de multiples travaux d'évaluation, par Siegler (2016). S'appuyant sur les données de psychologie cognitive mettant en évidence un lien entre la qualité de la représentation de la ligne numérique mentale et la réussite en mathématiques chez les enfants, Siegler a étudié les conditions dans lesquelles un jeu adapté pouvait améliorer la précision de la ligne numérique mentale, mais aussi d'autres compétences numériques telles que le comptage, la comparaison de nombres, l'identification de nombres, l'arithmétique. L'entraînement proposé par Siegler utilise un jeu de plateau linéaire (plutôt que circulaire), avec les nombres orientés de gauche à droite. L'étendue des nombres et les valeurs du dé sont choisies en fonction de l'âge des enfants (par ex., pour des enfants âgés de quatre ans, on choisira une ligne de 0 à 10 et les valeurs un et deux pour le dé). Ce jeu exige également que l'élève lise à voix haute les nombres sur lesquels il passe avec son pion, et pas seulement les nombres du dé, comme c'est le cas dans le jeu de l'oie. Ce jeu est efficace parce que son support matériel, qui représente les grandeurs des nombres, présente une analogie directe avec la ligne numérique mentale orientée horizontalement de gauche à droite. Les relations linéaires entre les grandeurs numériques et les indices kinesthésiques, auditifs, visuo-spatiaux et temporels impliqués au cours du jeu, fournissent une large base multimodale pour une représentation linéaire des grandeurs numériques. Le nombre de mouvements avec le pion, le nombre de mots-nombres récités, la distance parcourue, etc., sont en lien avec la grandeur des nombres. Ce jeu fait travailler à la fois l'aspect ordinal des nombres puisque les nombres sont ordonnés sur le plateau, et l'aspect cardinal puisque les quantités totales sont présentées sur les constellations du dé (ex : trois points sur le dé correspondent au mot-nombre «trois» et représentent trois cases sur le plateau).

Qu'est-ce que la ligne numérique mentale ?

De nombreux travaux, d'abord menés chez l'adulte, ont mis en évidence que les nombres symboliques activent une représentation spatiale de la quantité sous la forme d'une ligne numérique mentale. Cette ligne est orientée de gauche à droite, avec les petits nombres associés au côté gauche du corps et les grands nombres associés au côté droit. Cette ligne se caractérise également par une compression des grands nombres (plus les nombres sont grands, plus l'espace entre deux nombres consécutifs est petit dans notre représentation). Pour étudier la qualité de la représentation de la ligne numérique mentale chez l'enfant, Siegler a proposé une épreuve dans laquelle on demande aux enfants de positionner un nombre sur une ligne numérique bornée. Par ex., sur une ligne comprenant les bornes 0 et 100 et aucune graduation intermédiaire, l'enfant doit placer le nombre 36 en indiquant sa réponse par un trait sur la ligne. La réponse de l'enfant est comparée à la position exacte du nombre sur la ligne. Les réponses obtenues montrent que l'on observe une représentation logarithmique de la quantité numérique chez l'enfant, c'est-à-dire que les petits nombres sont plus espacés que les grands nombres. Cela rejoint la compression des grands nombres évoquée ci-dessus. Il existe des progrès importants avec l'âge se traduisant par le passage d'une représentation logarithmique à une représentation linéaire, d'abord pour les nombres de 0 à 10 chez les enfants de quatre ans, puis pour les nombres de 0 à 100 chez les enfants de six ans et les nombres de 0 à 1000 chez les enfants entre huit et dix ans. L'enfant va progressivement représenter la magnitude des nombres avec le même espace entre deux nombres consécutifs (n et n+1), quels que soient ces nombres.

Favoriser la réflexion

À partir de la réponse exacte d'un enfant à une question, il est parfois difficile de déterminer quel est réellement son niveau de compréhension. C'est le cas par ex. pour les activités de dénombrement qui peuvent être beaucoup pratiquées à l'école et à la maison, et pour lesquelles l'enfant pourrait répéter par imitation des procédures observées, mais sans en comprendre les principes sous-jacents. Amener l'enfant à réfléchir pourrait se traduire par lui proposer des activités dans lesquelles il doit prédire un résultat sans pouvoir, dans un premier temps, avoir recours à une résolution empirique, ou encore lui proposer des activités dans lesquelles il ne peut pas transférer directement une procédure apprise. C'est le cas par ex. des activités de dénombrement qui peuvent s'insérer dans des activités de résolution de problèmes et ainsi favoriser la réflexion et la compréhension du sens du comptage.
Dans une étude de Zur et Gelman (2004), les enfants sont incités à prédire un résultat avant de le vérifier par le comptage. À partir d'un petit problème verbal présenté avec un support matériel (ex : des croissants vendus par un boulanger, des pommes sur un arbre), les enfants doivent d'abord prédire le résultat d'une transformation (ajout ou soustraction), puis ensuite vérifier leur prédiction par le comptage. Même si les prédictions des enfants ne correspondent pas toujours à la cardinalité exacte, les résultats indiquent que, dès 3-4 ans, leurs réponses vont dans le sens de la transformation : ils proposent un nombre plus grand lorsqu'on ajoute et un nombre plus petit lorsqu'on retire un ou plusieurs objets. En résolvant ce type de problème, les enfants ont recours au dénombrement pour répondre à un objectif qui a du sens et ne répètent pas seulement une procédure apprise.
Pour résumer, les théories et les résultats des recherches en psychologie cognitive convergent vers l'idée que l'enfant doit, au cours de son développement et de son cursus scolaire, apprendre à donner du sens au nombre. Il doit apprendre à considérer les symboles numériques comme porteurs de magnitudes et non comme une simple suite ordonnée de symboles. À cette fin, **la mobilisation régulière des quatre modalités d'apprentissage à la maternelle (le jeu, la réflexion, l'exercice et la mémorisation), de façon complémentaire, concomitante ou alternée, répond à ces objectifs.**

En résumé

Les enfants possèdent des intuitions très précoces sur les quantités qui leur permettent de comparer des quantités et d'effectuer des calculs sur des quantités approximatives. A l'école maternelle, les enfants apprennent à réciter la comptine numérique. Les enfants apprennent peu à peu le sens des mots «un», «deux», «trois», puis «quatre». Ils passent ensuite par une étape importante, lorsqu'ils comprennent que le comptage permet de déterminer le nombre d'objets dans une collection (comptage-énumération). On retrouve les mêmes étapes lors de l'apprentissage des chiffres. Pour développer leur sens du nombre, les enfants doivent parvenir à greffer des symboles (mots-nombres, nombre écrit en chiffres) sur leurs représentations des quantités. Les stratégies de comptage sur les doigts permettent aux enfants d'entrer dans le calcul. Elles deviennent de plus en plus élaborées et abstraites. Les jeux de plateau et autres jeux de société sont privilégiés pour l'apprentissage du nombre en maternelle.

II. APPORTS DE LA RECHERCHE EN DIDACTIQUE SUR LES PREMIERS APPRENTISSAGES NUMÉRIQUES

La recherche en didactique a produit des concepts et méthodes qui aident à concevoir et à analyser les situations d'enseignement en tenant compte des tâches proposées aux élèves, de leurs activités en classe et des interventions des enseignants pour initier ces activités, les réguler, et expliciter les connaissances à acquérir. **L'enseignement des mathématiques à l'école maternelle est spécifique**. L'activité des élèves est très dépendante de la formulation des questions et consignes, des matériels, etc. Les écarts d'âge, même minimes, correspondent à des différences importantes de développement psychologique et moteur. Hors l'école, les enfants sont exposés de manière très différente aux savoirs mathématiques.

Situations pour mettre les élèves en activité d'apprentissage

Les savoirs mathématiques enseignés à l'école primaire sont des outils pour résoudre des problèmes. Dans la suite de leur scolarité, les élèves apprendront que ces savoirs sont également des objets théoriques organisés (Douady, 1986). **L'hypothèse fondamentale de la didactique des mathématiques est que les situations d'enseignement doivent permettre de faire acquérir des connaissances aux élèves pour résoudre efficacement des problèmes**. Brousseau (1998) a conçu une «*théorie des situations didactiques*» dans laquelle chaque situation a un rôle spécifique dans cette construction de connaissances. Dans un ouvrage destiné à l'enseignement des mathématiques à l'école maternelle, Hersant et Thomas (2019) déclinent de telles situations.

Cinq situations distinguées par Brousseau pour l'enseignement des concepts mathématiques à l'école maternelle

- La dévolution : le professeur conduit les élèves à s'approprier la tâche et à s'engager dans sa réalisation. Le professeur familiarise les élèves avec le matériel à utiliser et leur fait comprendre les contraintes à respecter pour réaliser la tâche proposée (règles du jeu, critères de réalisation de la tâche et critères de réussite, etc.). Il n'hésite pas à les faire travailler collectivement sur un ex. pour s'assurer qu'ils ont bien compris les éléments et à les rappeler.

- La situation d'action : les élèves cherchent à réaliser la tâche proposée. Ils se confrontent aux contraintes et critères de réussite explicités lors de la dévolution. Le professeur supervise leur travail, les encourage, réexplique et accompagne l'appropriation autant que nécessaire.

- La situation de formulation : la tâche exige que l'élève communique oralement ou par écrit. Il doit, par ex., demander à un autre élève d'aller chercher juste ce qu'il faut de bouchons pour fermer toutes les bouteilles. Ce n'est pas seulement le nombre qui est mobilisé, mais sa désignation orale ou écrite. L'élève apprend à les mettre en lien. Lorsqu'il écrit le nombre de bouchons souhaités, il apprend aussi que l'écrit a une fonction de communication. Ce n'est pas seulement un entraînement au geste graphique.

- La situation de validation : le professeur conduit les élèves à établir ou réfuter la validité des procédures mises en œuvre, c'est-à-dire que les contraintes sont respectées et que les critères de réussite sont satisfaits.

- L'institutionnalisation : le professeur dégage la généralité des procédures rencontrées en classe. Il conduit les élèves à apprendre que des procédures utilisées pour résoudre un problème pourront être utilisées pour résoudre d'autres problèmes analogues.

Le rôle du professeur dans la mise en œuvre de ces situations

Ces cinq situations contribuent à l'apprentissage mathématique des élèves, mais également à l'apprentissage de la conduite à adopter pour apprendre en mathématiques : **agir pour atteindre l'objectif défini par la question ou la consigne, dire comment on a procédé, comprendre pourquoi on a réussi ou non, écouter les autres, et savoir qu'il y a des connaissances qui pourront être réutilisées dans d'autres problèmes.** Comme l'explique Hersant (2020), le rôle du professeur est majeur. Il est attentif à la pertinence des conditions qu'il met en place (aspects matériels, consigne…) au regard de ce qu'il souhaite que les élèves apprennent (Hersant, 2022). Il les encourage et les sécurise : il valorise les essais, il rassure parce que parfois plusieurs essais sont nécessaires. Il leur fait comprendre qu'il ne s'agit pas de faire pour faire plaisir, mais d'agir pour apprendre.

Broccolichi et Roditi (2014) montrent que les enseignants atténuent parfois leurs exigences quant aux savoirs à acquérir afin de préserver la qualité de leurs relations avec les élèves. Allard et Mamede (2022) révèlent que la volonté de rendre ludiques les situations d'apprentissage se réalise parfois au détriment des enjeux de savoirs : des situations trop simples pouvant provoquer l'ennui, des situations trop difficiles pouvant créer un sentiment d'échec. Allard (2015) met au jour l'importance de s'appuyer sur les activités et les productions des élèves pour structurer le savoir par le professeur.

Apports didactiques pour l'apprentissage du nombre à l'école maternelle

Le professeur doit connaître les fonctions et les représentations du nombre, et faire la différence entre nombre et quantité.

Les fonctions du nombre

Le nombre a 3 fonctions enseignées à l'école maternelle.
Le nombre pour exprimer une quantité : c'est la fonction cardinale du nombre. Elle intervient dans différentes situations : réaliser une collection dont le cardinal est donné, réaliser une collection comportant autant d'éléments qu'une autre alors que les deux ne sont pas visibles simultanément, etc.
Le nombre pour désigner un rang, une position : c'est la fonction ordinale du nombre. Les numéros des jours dans le mois ont cette fonction, comme ceux des quais de la gare ou des cases d'un jeu de plateau. La désignation des nombres ordinaux diffère de celles des nombres cardinaux, même si, en français, les exceptions sont nombreuses : on dit « le 1er février » mais aussi « le 2 février ».
Les nombres pour comparer ou calculer : la comparaison des nombres permet de comparer des quantités ou des positions. La collection dont le cardinal est le plus grand est celle qui comporte la plus grande quantité ; la position correspondant au nombre le plus grand est la plus avancée. Le calcul permet de déterminer le cardinal d'une collection sans dénombrer : réunion de collections dont les cardinaux respectifs sont connus, ajout ou retrait d'une quantité connue à une quantité connue, etc. Le calcul permet aussi de déterminer une position : après un déplacement connu (en avant ou en arrière) à partir d'une position connue.
Une autre fonction ne relève pas des programmes d'enseignement à l'école : le nombre pour désigner. Le nombre est utilisé comme une étiquette. Il pourrait être remplacé par une lettre, une couleur, etc. Il s'agit de numéros : ceux des autobus ou des maillots des joueurs d'une équipe, par exemple. Cette fonction n'est pas l'objet d'un enseignement particulier à l'école maternelle, même si ces numéros font partie du monde environnant des enfants et les conduisent à associer des noms de nombres à des écritures chiffrées.

Enseigner les représentations du nombre pour enseigner le nombre

Afin de conserver la mémoire d'une position ou d'une quantité, on doit utiliser 3 types de représentations :
- la représentation analogique (constellation, doigts de la main);
- la représentation verbale (mot-nombre);
- la représentation symbolique (écriture chiffrée).
Pour se souvenir d'une quantité, il n'est pas indispensable de lui associer un nombre, on peut la représenter par une collection équipotente d'objets (on dit que deux collections sont équipotentes lorsqu'elles ont autant d'éléments l'une que l'autre). Si un élève doit aller chercher juste ce qu'il faut de bouchons pour boucher des bouteilles, il peut lever un doigt pour chaque bouteille ou marquer un point sur une feuille de papier pour chaque bouteille, puis se déplacer sur le lieu où sont stockés les bouchons et prendre un bouchon par doigt levé ou par point marqué. Il aura alors autant de bouchons que de bouteilles, mais sans savoir combien il y en a. Il s'agit d'une **représentation analogique** de la quantité. Comme l'expliquent Charnay et Valentin (1991), comprendre la nécessité de conserver la mémoire de la quantité constitue sans doute une première étape vers l'apprentissage du nombre.
C'est en associant un nom de nombre à la quantité de doigts levés que l'élève saura combien il y avait de bouteilles, et combien de bouchons il a rapporté. Ce nom de nombre en est une **représentation verbale**. L'élève peut dénombrer les bouteilles, trouver qu'il y en a six, mémoriser ce nombre et aller chercher six bouchons. Pour ne pas oublier ce nombre, il peut aussi le noter sur une feuille de papier, et donc utiliser son écriture chiffrée qui en est une **représentation symbolique**.
Pour favoriser l'apprentissage du nombre comme représentant de la quantité, les didacticiens ont imaginé des situations qui rendent les représentations analogiques inefficaces, par exemple une situation où l'élève n'a plus la possibilité de prendre lui-même les bouchons et doit les commander oralement à un autre élève.
Il y a d'autres représentations des nombres, adaptées aux personnes déficientes auditives (les représentations en langue des signes remplacent des représentations verbales) ou visuelles (lesécritures en braille remplacent les représentations symboliques chiffrées).

Enseigner le passage de la quantité au nombre

Traduire une quantité par un nombre nous est familier parce que nous l'avons appris enfant. À l'école maternelle, les PE doivent l'enseigner à leurs élèves, c'est-à-dire organiser des situations leur permettant de réaliser cet apprentissage. Les élèves doivent même apprendre que dans une collection d'objets il y a une (et une seule) quantité (Piaget, Szeminska, 1941). Les jeunes enfants affirment que

dans une même ligne de jetons, il y en a plus si l'on espace davantage les jetons, et il y en a moins si on les resserre. Ils maintiennent leur affirmation, même lorsqu'on leur rappelle la situation initiale. Les enfants doivent donc apprendre l'indépendance entre la quantité et l'organisation spatiale de la collection, c'est cetteindépendance que les psychologues appellent la **conservation des quantités**.
Gréco (1962) a constaté le même phénomène avec de jeunes enfants qui savent compter. Pour ces enfants, le nombre n'est pas encore totalement un indicateur de la quantité. Une étude (Brissiaud, 1991) explique cela en distinguant la maîtrise de la comptine numérique de celle du **dénombrement**. Parmi les enfants qui comptent les jetons du premier jusqu'au huitième, certains attribuent un nom de nombre à chaque jeton sans que ce nom exprime le nombre de jetons. Ils ont compté jusqu'à huit, mais cela ne signifie pas pour eux qu'il y a huit jetons dans la ligne et que ce huit exprime une quantité bien précise. **Ils ont compris la fonction ordinale du nombre, mais pas sa fonction cardinale.** Pour d'autres enfants en revanche, huit exprime bien une quantité, c'est-à-dire que pour eux, toutes les collections de huit objets ont autant d'objets, la même quantité, le même nombre. **Ces enfants ont effectué un dénombrement**. Pour inciter au dénombrement, le professeur peut insister pour que les élèves mettent en lien les noms des nombres et le dénombrement : *«un jeton, et encore* ***un*** *jeton, ça fait* ***deux*** *jetons, et encore un jeton, ça fait* ***trois*** *jetons… et encore un jeton, ça fait* ***huit*** *jetons»*.
Les enfants, dans leur famille, apprennent souvent à compter avant même d'aller à l'école. Les professeurs doivent donc être très vigilants : un élève qui compte jusqu'à huit quand il y a huit objets à dénombrer n'a pas forcément compris que le dernier mot nombre prononcé indique la quantité d'objets. Certains élèves qui connaissent la suite des nombres ne savent pas qu'il est fondamental de compter tous les objets de la collection une et une seule fois (ce que Briand (2000) appelle **énumération**), et que cela nécessite d'organiser le comptage.

Analyses de situations

« Les voyageurs » : vers la fonction cardinale du nombre

Après un temps de familiarisation avec le matériel, chaque élève dispose d'une boîte qui représente un wagon et au fond de laquelle est posée une fiche amovible avec des ronds dessinés qui représentent les sièges des voyageurs. Une autre boîte, contenant les voyageurs, est posée dans un coin de la classe ; depuis cet endroit on ne voit pas le fond du wagon. Un quai est matérialisé sur le côté du wagon. L'enseignant donne un petit panier à chaque élève pour rapporter les voyageurs. L'objectif de l'élève est de rapporter autant de voyageurs qu'il y a de sièges dans le wagon. L'élève devra donc constituer une collection de voyageurs de même cardinal que la collection de sièges. L'éloignement du wagon et de la réserve de voyageurs contraint l'élève à trouver un moyen de garder la mémoire de quantité. La situation vise ainsi la mise en fonctionnement de la fonction cardinale du nombre.
Consigne donnée aux élèves : «*Tu dois aller chercher, en une fois, des voyageurs pour qu'il y ait un voyageur par siège, pas de siège sans voyageur, pas de voyageur sans siège. Tu utilises ton panier pour rapporter les voyageurs*.»

La consigne

La formulation «*il doit y avoir un voyageur par siège, pas de voyageur sans siège, pas de siège sans voyageur*» exprime **la condition de la réussite**. Cette condition permet aux élèves de valider ou d'invalider seuls leur production. Il est très important que l'élève comprenne que sa réussite relève du respect ou non des consignes posées au départ (Hersant, 2022).
Cette formulation peut sembler redondante, mais elle présente plusieurs avantages. C'est d'abord une façon non ambiguë de demander de prendre le même nombre de voyageurs que de ronds sans utiliser les mots «*combien*», «*nombre*» ou «*autant*». Ces mots risqueraient d'orienter les élèves vers des procédures de dénombrement sans qu'ils ressentent vraiment cette nécessité mathématique. Par ailleurs, le mot «autant» peut être inconnu ou mal compris des jeunes élèves.
La consigne donnée correspond à une situation d'action visant la construction du nombre comme mémoire de la quantité. La consigne *«Lucie va maintenant aller chercher les voyageurs à ta place. À toi de lui donner les informations pour cela. Il faut toujours un voyageur par place, pas de place sans voyageur, pas de voyageur sans place* » correspond à une situation de formulation qui sera utilement proposée dans le prolongement de la situation d'action pour pousser l'élève à formuler la quantité de voyageurs à aller chercher. Selon les contraintes que l'on pose sur la façon de formuler (communiquer

oralement ou par écrit la quantité, donner l'étiquette nombre correspondant à la quantité, etc.) des connaissances différentes sont convoquées. Attention : un élève qui lèverait autant de doigts que de ronds dans la situation d'action pourrait dessiner autant de croix que de ronds dans la situation de formulation écrite, il conviendrait alors de valider sa procédure et d'exiger une formulation orale ou de demander une étiquette de nombre pour l'aider à passer de la représentation analogique de la quantité au nombre.
Lors de la présentation de la situation, l'enseignant explique et montre comment «jouer» en tenant compte des contraintes. Il s'appuie alors sur un ex., comme la grille de quatre sièges, et simule une réussite et un échec afin d'introduire, dès la situation de dévolution, les moyens de l'auto-validation. Si un élève comprend qu'il faut prendre systématiquement quatre passagers, le changement de fiche le conduira à prendre en considération les contraintes du milieu et à mieux comprendre le problème posé.

Les variables didactiques

La fiche amovible où sont dessinés les sièges n'est pas visible depuis l'endroit où est située la réserve de voyageurs ; elle ne peut pas être emportée par l'élève. Ces conditions évitent qu'il prenne un voyageur par siège sans utiliser le nombre. L'élève n'a pas non plus le droit de faire des allers et retours en prenant les voyageurs un à un…
Les sièges sont dessinés sur les fiches. L'élève ne peut donc pas réorganiser cette collection pour la dénombrer plus facilement. Le nombre de sièges dessinés et leur disposition influencent les procédures qui seront utilisées pour dénombrer, et les connaissances nécessaires pour cela. Ces fiches sont donc des leviers pour faire évoluer les procédures des élèves, on dit que ce sont des **variables didactiques**.
La première de leurs fonctions est d'adapter la tâche aux acquis des élèves. Ainsi, les fiches 1 et 2 permettent de reconnaître la quantité par perception visuelle immédiate (ou *subitizing*) en utilisant les constellations du dé. La collection représentée sur la fiche 3 n'est pas organisée, l'élève va devoir compter pour dénombrer. Avec la fiche 4, l'élève peut constituer la collection de voyageurs en retenant qu'il en faut 4 et encore 1, ce qui est une façon de désigner la quantité de voyageurs, même si cette désignation ne dit pas combien.
Dans la situation d'action, le matériel disponible pour garder la mémoire de la quantité est une variable didactique. Si les élèves ne disposent pas de matériel auxiliaire (papier et crayon par exemple), hormis leurs doigts, ils ne pourront pas constituer de collection intermédiaire (par ex.dessiner autant de ronds que de sièges) et seront ainsi conduits à dénombrer la quantité de sièges. Donner le panier dès le départ constitue un moyen de limiter les possibilités d'utiliser les doigts comme collection intermédiaire.

La différence entre « faire » à l'école et « apprendre » à l'école

Les situations conçues pour l'école maternelle reposent souvent sur du matériel. Celui-ci est pensé pour que les élèves réalisent les tâches proposées grâce à leurs actions et construisent les connaissances qui sous-tendent ces actions. Cela n'a rien d'automatique : comme le montrent différentes recherches (Coulange, 2012; Margolinas, 2004, Perrin-Glorian, 1993), il ne suffit pas que les élèves agissent pour qu'ils apprennent de leurs actions. Certains élèves n'ont pas compris qu'ils ont à apprendre de ce qu'ils ont fait, ils croient que seule la réussite est importante, et par conséquent ils ne comprennent pas les enjeux de l'institutionnalisation.
Par ex., dans la situation du voyageur, la «plate-forme» est un moyen de différer le passage de l'action (rapporter des voyageurs) à la validation (installer les voyageurs sur les sièges). Quand les voyageurs sont posés sur la plate-forme, l'enseignant peut poser la question : «*Est-ce que tu penses que tu as bien un passager par siège, pas de siège sans passager et pas de passagers sans siège*?». L'élève aura alors la possibilité de réfléchir une nouvelle fois à ce qui est attendu, y compris de recommencer si, par ex., il a rapporté des voyageurs sans se soucier de leur quantité. La plate-forme rend possible une intervention du PE pour aider les élèves à comprendre que la pensée doit précéder leur action, et qu'ils ont à apprendre de leur action.

« L'escargot » : vers la fonction ordinale du nombre

Quatorze cartes à jouer, dont le verso est identique, sont alignées sur une table ou sur le sol. À l'une des extrémités est positionné un disque bleu, à l'autre un disque rouge. Un élève ferme les yeux. Pendant ce temps, au vu des autres élèves, le PE cache sous une des cartes un dessin d'escargot. L'élève qui a fermé les yeux doit retrouver où est caché l'escargot; les autres élèves peuvent l'aider, mais n'ont pas le droit de montrer l'emplacement de la carte, ils peuvent seulement expliquer avec des mots. L'objectif est que l'élève utilise le nombre pour repérer la position de la carte sous laquelle est caché l'escargot. C'est la fonction ordinale du nombre qui est travaillée ici. Attention : le nombre permet de repérer une carte à la condition d'indiquer à partir de quelle extrémité on commence à compter. Il est pour cela préférable de choisir un nombre de cartes pair. En effet, avec 11 cartes par ex., la formulation «*l'escargot est sous la 6e carte*» conduira à trouver l'escargot bien que le point de départ n'ait pas été précisé.

La dévolution

Les disques bleu et rouge sont positionnés, mais l'enseignant ne dit rien sur leur usage. Il est important que les élèves utilisent d'eux-mêmes ces repères pour désigner la position de l'escargot. Pour que chaque élève comprenne bien le problème, et en particulier n'y voie pas un jeu de hasard(c'est l'enjeu de la dévolution) il est intéressant d'effectuer une ou deux parties au cours desquelles les élèves peuvent montrer où est caché l'escargot. Empêcher d'indiquer cet emplacement posera alors une contrainte qui obligera les élèves à trouver une façon de repérer la carte qui masque l'escargot puis de désigner l'emplacement de cette carte par sa position dans la file de cartes. Pour les premières parties, l'enseignant placera l'escargot à l'une des extrémités, ce qui conduira probablement à des formulations comme «*l'escargot est sous la carte juste avant le point rouge*» où le nombre n'est pas encore nécessaire. Au fil des parties, l'enseignant éloignera l'escargot des extrémités afin de rendre indispensable l'utilisation du nombre pour désigner sa position dans la file.

La validation

Cette situation est conçue pour rendre possible la validation des propositions des élèves. Les points rouge et bleu évitent toute ambiguïté sur l'origine du comptage et sur le numéro de chacune des cartes. La proposition «*tu pars du point rouge et tu comptes 4 cartes*» permet ainsi de désigner une carte avant de vérifier que l'escargot est bien sous cette carte en la retournant. Des propositions comme «*tu comptes les cartes en partant du point rouge, quand tu es arrivé à 5 c'est la bonne carte*» ou «*l'escargot est sous la carte numéro 5 en partant du point rouge*» ou «*l'escargot est sous la cinquième carte en partant du point rouge*» seront ainsi validées par le matériel. Ces formulations mobilisent toutes le nombre dans sa fonction ordinale, même celles qui ne comportent pas le mot «cinquième», puisqu'elles désignent bien la position de la carte qui cache l'escargot.
Le PE a un rôle important pour éviter que les élèves valident à tort certaines procédures. Si un élève indique que «*l'escargot est sous la 4e carte*», l'enseignant invitera les élèves à repérer l'ambiguïté tout en maintenant, autant que possible, la validation par le matériel. Il pourra par ex. prendre le rôle de l'élève devant valider la proposition et soulever la 4e carte en partant du disque bleu et ainsi mettre en évidence que l'escargot n'est pas caché sous cette carte.

« Les trois bandes » : vers la comparaison

Trois bandes sont disposées sur la table d'un élève. L'élève dispose de pions qu'il doit répartir sur les trois bandes de manière à avoir le même nombre de pions sur chaque bande. La quantité de pions doit être assez nombreuse pour rendre l'utilisation du nombre nécessaire, entre 15 et 36 par ex. Trois étapes conduisent à faire évoluer les procédures initiales des élèves pour aboutir au dénombrement et à la comparaison. La fonction cardinale se conjugue ainsi à la comparaison pour atteindre l'objectif fixé.
Etape 1. Les bandes sont amovibles. Le matériel rend possible la correspondance terme à terme comme outil de comparaison. La validation convoque les notions telles que : plus que, moins que, autant que. Mais le nombre n'est pas encore indispensable.
Etape 2. Les bandes sont fixées et disposées de manière à rendre difficile la correspondance terme à terme. Dans la situation de validation, les élèves qui utilisent le nombre de pions pour comparer apprennent que s'il y a le même nombre de pions sur chaque bande alors il y a autant de pions sur chaque bande. Mais ils peuvent encore s'appuyer sur la perception visuelle et la comparaison des longueurs…
Etape 3. Six gommettes qui représentent des pions sont collées sur les bandes. L'objectif est toujours d'obtenir le même nombre de cases occupées (pions et gommettes) sur chaque bande. Les gommettes étant collées en nombre différent et à des emplacements différents sur chaque bande, la répartition équitable des pions devient inefficace et la validation par le dénombrement nécessaire.

L'institutionnalisation

La situation d'action, dans les trois étapes, vise le même objectif : obtenir le même nombre de pions sur chaque bande. On pourrait penser que les élèves vont répartir les pions sur les bandes, compter les

pions répartis, puis ajuster la répartition afin d'obtenir le même nombre de pions sur chaque bande. L'expérience montre que, majoritairement, les élèves répartissent les pions sur les trois bandes, puis comptent la totalité des pions disposés sur les bandes; ce qui ne permet pas de comparer les trois quantités. Lorsque les pions sont assez nombreux, parmi les élèves qui réussissent, certains ne dénombrent pas les pions, mais les cases vides : ils raisonnent sur le complément.
Différentes procédures coexistent donc dans la classe; certaines sont efficaces, d'autres non. L'enseignant est attentif au travail effectué par les élèves afin d'identifier précisément les procédures utilisées. Il est essentiel que l'institutionnalisation s'appuie sur ce qui a été fait en classe : elle invalide les procédures erronées, elle hiérarchise les procédures efficaces et aboutit à la mise en évidence de la plus efficiente. Pour gérer la situation d'institutionnalisation à l'école maternelle, le PE aide les élèves à se remémorer leur activité et à être attentifs à celles des autres. Il utilise à cet effet des photos ou des extraits vidéo.

« Le bon panier » : du nombre au calcul

Le matériel : messages comportant une instruction de coloriage indiquant par ex. «*4 œufs verts et 5 œufs rouges*» et, à distance des tables des élèves, des dessins de paniers remplis d'œufs à colorier. L'élève reçoit un message; sans le transporter il doit aller chercher «*le bon panier*» c'est-à-dire l'image représentant un panier comportant juste ce qu'il faut d'œufs pour qu'il puisse réaliser le coloriage indiqué dans le message. L'élève rapporte son panier et colorie les œufs. La tâche est réussie si les deux critères sont réalisés : l'instruction de coloriage est respectée et tous les œufs sont coloriés. La procédure visée pour trouver le bon panier est une procédure de calcul : déterminer le cardinal d'un tout à partir de celui de ses parties. Pour le message précédent, un élève qui lève 4 et 5 doigts trouvera le bon panier sans avoir déterminé la somme. En jouant sur les variables de la situation, l'enseignant conduit progressivement vers la procédure visée (il peut aussi temporairement laisser certains élèves transporter leur message s'il le juge nécessaire).
Dans une première étape, la disposition des œufs dans le bon panier correspond à la décomposition issue du message (par ex. 9 œufs séparés en deux groupes de 4 œufs et 5 œufs pour le message 4 verts et 5 rouges). Cette étape est essentielle pour faire comprendre les contraintes de la situation, même si d'autres procédures que celle visée sont valides. La disposition des œufs au sein des groupes est une variable importante, car elle oriente vers une procédure plutôt qu'une autre : reconnaissance immédiate (*subitizing* ou constellation du dé) ou dénombrement.
Dans une deuxième étape, la disposition des œufs est indépendante du message. Suivant la taille des nombres en jeu, l'élève pourra : utiliser ses doigts, mémoriser les deux nombres, sur-compter (compter 5 œufs rouges à partir des 4 œufs verts et obtenir 9 œufs), calculer (par ex. trouver 9 en comprenant qu'il y aura 1 œuf de moins que s'il y en avait eu 5 verts et 5 rouges).
L'enseignant observe les élèves et prélève des informations sur les procédures et les paniers choisis par eux. Ces informations constituent des indicateurs de leurs connaissances et de leur capacité à s'adapter à la situation. Plusieurs essais sont nécessaires, ce qui est le signe que la situation est adaptée aux connaissances des élèves et aux objectifs de la séance. Une fois devant les paniers, certains hésitent, se souviennent d'une des deux quantités et ont oublié l'autre, d'autres manifestent le besoin d'aller relire le message, etc. Enfin, certains élèves construisent des premiers faits numériques en retenant que 4 et 5 font 9.
À chaque étape, des mises en commun sont nécessaires pour que les procédures soient décrites : celle où on reconnaît immédiatement 4, celle où l'on recompte tous les œufs, celle où l'on compte à partir du nombre d'œufs rouges (surcomptage), celle où l'on sait déjà le total des deux nombres, celle où l'on retrouve ce total, etc. Les élèves décrivent plus ou moins facilement leurs activités (matérielle et cognitive). Dans ces mises en commun, il est important de ne pas mettre l'accent sur une procédure en particulier afin d'éviter que les élèves l'utilisent systématiquement, y compris quand elle est peu adaptée.
D'autres étapes sont possibles : donner des instructions de coloriage avec trois couleurs au lieu de deux, introduire une situation de formulation à autrui où l'élève ne doit plus trouver lui-même le bon panier, mais doit le commander à un autre élève, etc. Les variables didactiques sont nombreuses, cette situation constitue donc une source d'expériences pour les élèves où ils peuvent progresser à leur rythme en mobilisant des procédures adaptées aux quantités et aux décompositions proposées ainsi qu'aux représentations des œufs dans les paniers. Ces expériences conduisent à la construction

progressive de faits numériques comme 10 c'est 5 et 5, ou 6 et 4, ou encore 4 et 4 et 2. La fréquentation de ces faits numériques et l'affichage de paniers «modèles» contribuent à forger l'écrit comme un outil pour garder en mémoire les connaissances mathématiques mobilisées durant les activités.

Focus - Égalité filles-garçons en mathématiques à l'école maternelle

De nombreux travaux ont été menés pour étudier les différences genrées de pratiques enseignantes en mathématiques au niveau des interactions enseignant-élèves ou au niveau des représentations des enseignants. Jarlégan (1999, 2016) a montré que les filles et les garçons sont progressivement incités à investir différemment les mathématiques à l'école élémentaire, Mosconi (2001) a mis en évidence des différences quantitatives et qualitatives de traitement des élèves en mathématiques selon leur sexe à l'école élémentaire.

Qu'en est-il à l'école maternelle ?

Les études qui portent sur l'école maternelle n'indiquent pas de distinction de genre dans la maîtrise des compétences mathématiques. La distinction se fait à partir de 6 ans ce qui interroge l'enseignement des mathématiques au début de l'école élémentaire (Fischer et Thierry, 2022).
Les évaluations repères de CP (temps 1 et 2) et de CE1 (temps 3) doivent nous interpeller. À l'entrée au CP (temps 1), aucune différence de résultats en mathématiques n'est constatée selon le sexe des élèves alors que dès le temps 2 et plus encore au temps 3 les écarts se creusent entre les filles et les garçons, au détriment des filles.
Des travaux sur les inégalités genrées à l'école maternelle ont mis en évidence des différences de comportements des filles et des garçons dans la cour de récréation (Zaidman, 1996; Pasquier, 2015), l'impact différencié sur les filles et les garçons des albums de littérature de jeunesse intégrant des stéréotypes genrés (Dias-Chiaruttini, 2015), des différences de développement verbaux dans la manipulation de jouets stéréotypés (Bardet, 2016), des différences de jugements des enseignants vis-à-vis des élèves selon qu'ils soient filles ou garçons (Benit, Sarremejane, 2017; Jarlégan, Tazouti, 2012).
Il est donc important d'exercer une vigilance quotidienne dans sa classe pour contrer les stéréotypes de genre inconsciemment à l'œuvre dès l'école maternelle, en veillant à :
- Choisir des collections à dénombrer ou des objets à manipuler qui n'ont pas de valeur genrée ou bien qui sont proposés indifféremment aux filles et aux garçons quelle que soit leur nature stéréotypée.
- Interpeller quantitativement et qualitativement les filles et les garçons.
- Ne pas enfermer les élèves dans des identités d'élève-fille ou d'élève-garçon, à partir de consignes ou d'interpellations stéréotypées.

En résumé

Les nombres sont des outils pour : la quantification, le rangement, la comparaison et le calcul. Le comptage est l'une des procédures de dénombrement. Il y en a d'autres. On représente les nombres de façon analogique (représentation concrète ou figurée), verbale (mot-nombre) ou symbolique (écriture chiffrée). L'enseignant propose des situations didactiques qui provoquent des activités différentes chez les élèves (action, formulation, validation) et qui ont chacune leur rôle dans l'apprentissage. En amont de la séance, l'enseignant choisit des situations propices à l'apprentissage des savoirs visés en portant attention aux variables didactiques, à la consigne et aux conditions de la réussite. Durant la séance, l'enseignant s'assure que les élèves s'approprient la question, il observe et analyse leur activité, hiérarchise les procédures et explicite les connaissances à mémoriser et à entraîner.

III. QUELLES MISES EN ŒUVRE PÉDAGOGIQUES POUR PRENDRE EN COMPTE LES BESOINS DE CHAQUE ÉLÈVE ?

Ce chapitre donne des pistes pour enseigner et mettre en œuvre le processus d'acquisition de la notion de nombre chez les élèves de maternelle. Il s'appuie sur la construction d'une programmation de cycle

au sein de l'école et propose des situations de manipulations motivantes, variées et évolutives de la PS à la GS. Il invite à un enseignement structuré, progressif, différencié et régulé s'appuyant sur le langage oral et écrit, sur l'évaluation et l'observation des élèves qui donne donc lieu à une évaluation à partir de critères identifiés.
Acquérir le nombre c'est être capable de résoudre des problèmes qui mobilisent le nombre en utilisant toutes les procédures possibles :
- perception visuelle de quantités très différentes;
- perception visuelle de quantités inférieures ou égales à 3;
- perception visuelle due à la représentation spatiale des éléments (les constellations parex.);
- correspondance terme à terme, comptage de un en un/dénombrement, utilisation de la frise numérique.
La progressivité des apprentissages sur le nombre au cycle 1 nécessite d'identifier tous les types de situations impliquant le nombre, pouvant être proposés dans ce cycle, et toutes lesprocédures possibles pour résoudre ces situations en les hiérarchisant de la plus simple à la plus complexe.

Les étapes de l'apprentissage du nombre

Construire une programmation de cycle

Établir une programmation de l'enseignement du nombre ne peut pas se limiter à fixer les nombres étudiés pour chaque niveau de classe. Le programme indique les compétences à acquérir en fin de maternelle mais n'identifie pas les étapes de leur acquisition. **Il n'est pas possible d'envisager la progressivité des apprentissages en répartissant les compétences citées dans le programme sur les trois années du cycle puisque la majorité sont travaillées tout au long du cycle.** Ainsi, par exemple, la compétence «*Avoir compris que le cardinal ne change pas si on modifie la disposition spatiale*» intervient dans beaucoup de situations de recherche de la quantité travaillées de la PS à la GS. L'inventaire des problèmes impliquant le nombre permet d'envisager une programmation sur le cycle à partir des types de situations et des procédures travaillés. Rappelons **qu'une programmation sur le cycle consiste à identifier les différents objectifs de séquences en les ordonnant**. **Chaque séquence comporte plusieurs séances dont l'ensemble des objectifs permet d'atteindre l'objectif de séquence.**

Faire évoluer le rôle de la manipulation

Le rôle de la manipulation évolue progressivement pour permettre aux élèves d'accéder à l'abstraction. **Le matériel, est progressivement remplacé par des objets manipulables moins figuratifs, comme des jetons ou des cubes**. La manipulation est ensuite progressivement empêchée afin de permettre aux élèves de comprendre les concepts mathématiques abordés. La manipulation n'est pas une finalité, mais une étape intermédiaire permettant d'engager un travail cognitif. Le matériel change progressivement de statut : de matériel pour observer, il devient matériel pour valider ce qu'on est capable d'anticiper. Il permet également de raisonner sur les procédures. La manipulation motive les élèves à s'engager dans une démarche de résolution de problème qui leur permet de comprendre les concepts visés. Manipuler permet de comprendre «où est le problème», «ce qu'on se demande» et joue aussi un rôle fondamental dans la validation par les élèves des solutions proposées. Cependant, **la manipulation doit progressivement être contrainte, empêchée pour accéder au nombre qui est et restera un concept, une abstraction**. Se contenter de «manipulations seules» est illusoire, car elles enferment les élèves dans l'action alors que l'objectif est de les amener à penser cette action et à comprendre les notions mathématiques abordées. C'est quand l'élève s'arrête de manipuler «en actes» qu'on voit qu'il a compris, qu'il entrevoit ce qui fait que cela va fonctionner une autre fois, dans un autre contexte avec un autre matériel.

Mener un enseignement progressif qui s'appuie sur le langage oral et écrit

Le rôle de la manipulation est articulé à celui de la verbalisation qui permet à l'élève de décrire et d'expliquer sa procédure («*j'ai mis quatre dans ma tête et avec mes doigts j'ai fait cinq, six*»), puis de valider (ou non) la solution. La verbalisation par l'enseignant et par l'élève des actions réalisées et de leurs résultats constitue une aide importante à la prise de conscience des procédures utilisées et de

leurs effets. L'enseignant est attentif à organiser les échanges oraux pour aider à structurer les apprentissages des élèves :
- il aide à décrire les situations, les relations et à justifier sa réponse;
- il attire l'attention sur certaines procédures et connaissances utilisées en situation;
- il questionne : *« Comment le sais-tu ? Comment fais-tu ? Comment es-tu sûr de ta solution ? Comment peux-tu vérifier ? »* et introduit le vocabulaire spécifique pour que les enfants l'apprennent, se l'approprient etl'utilisent.

Conduire un enseignement différencié et régulé par l'observation et l'évaluation des acquis des élèves

Le professeur observe les élèves en activité pour évaluer et réguler les apprentissages. Ces observations orientent la suite des activités et des situations pédagogiques proposées. L'enseignant planifie, régule et différencie les activités qu'il propose aux groupes d'élèves en variant notamment la taille des collections, le fait de pouvoir agir ou non sur les objets (lesdéplacer ou non), le fait d'avoir à anticiper la réponse lorsque les objets sont éloignés ou dissimulés, le fait d'être contraint à formuler oralement ou par écrit la quantité d'objets à aller chercher. Ces variables importantes amènent progressivement les élèves à faire évoluer leurs procédures et à construire les savoirs attendus.

Comment construire un enseignement progressif pour chaque fonctionnalité du nombre

Le programme cite les trois principales utilisations du nombre qui ont été vues plus haut à prendre en compte pour envisager une programmation tout au long des trois années.

Programmation de l'enseignement de la fonction cardinale des nombres

Suivent les étapes dans l'acquisition du nombre en tant que quantité à partir desquelles une programmation peut être établie. Chaque étape comporte plusieurs types de situations ou procédures qui permettent de définir les séquences à proposer. Il est possible de regrouper plusieurs types de situations ou procédures dans une même séquence, voire dans une même séance. Il est possible de scinder une étape en plusieurs pour définir une séquence en fonction des élèves. Tous les types de situation pour une même procédure peuvent ne pas être travaillés si l'on s'assure par une évaluation que les objectifs énoncés pour l'étape sont atteints.

Le nombre en tant que quantité avec sa désignation orale

ETAPE 1 : la correspondance terme à terme pour des quantités inferieures, égales ou supérieures à 3

Objectifs

- Commencer à construire la notion de quantité **sans faire intervenir la suite numérique orale, sans compter les objets 1 par 1, mais juste en regardant.**
- Acquérir la procédure de correspondance terme à terme (associer chaque élément d'une collection à un élément d'une autre collection) qui servira, dans les étapes suivantes, à valider les résultats dans les activités nécessitant une autre procédure.

Types de situations et procédures

- Réaliser une collection de quantité égale à la collection proposée en utilisant lacorrespondance terme à terme.

Exemple :

Matériel : 4 poupées et des assiettes empilées (plus que 4).
Tâche : Mettre juste ce qu'il faut comme assiettes pour qu'il y ait une assiette par poupée.
Comparer les quantités de deux collections en s'assurant qu'il y en a autant dans chaque collection et en utilisant la correspondance terme à terme.

Exemple :

Matériel : 5 poupées d'un côté et 5 assiettes un peu éloignées des poupées.
Tâche : Dire s'il y a juste ce qu'il faut comme assiettes pour que chaque poupée ait une assiette et qu'il ne reste pas d'assiette. On a le droit de bouger les poupées ou les assiettes.

L'enseignant introduit le terme **autant que**. Ex : «*Il y a une assiette pour chaque poupée. Il n'y a pas de poupée sans assiette. Il ne reste pas d'assiette sans poupée. Il y a autant de poupées que d'assiettes.*»
Pour les quantités jusqu'à 3, l'enseignant les nomme en utilisant les itérations de 1. Ex : «*Il y a trois assiettes, une assiette et une assiette et encore une assiette, ça fait trois assiettes.*»
Étayage langagier par l'enseignant après l'activité des élèves lors de la validation
Formaliser l'introduction du terme «*autant que*» et les mots-nombres désignant les quantités jusqu'à 3. Introduire les itérations de 1 pour distinguer les quantités 1, 2 et 3 («*deux c'est un et encore un*»; «*trois c'est un, encore un et encore un*»).

ETAPE 2 : LA RECONNAISSANCE VISUELLE ET LA DESIGNATION ORALE DES QUANTITES 1 ET 2 PUIS DES QUANTITES 1 A 3
Objectifs
- Construire les collections de 1 ou 2 éléments puis de 1 à 3 éléments **sans faire intervenir la suite numérique orale**.
- Commencer à nommer les quantités 1 et 2 puis de 1 à 3.
- Utiliser la procédure de correspondance terme à terme pour valider ses résultats.

Types de situations et procédures pour les quantités 1 et 2
- Réaliser une collection de quantité égale à la collection proposée par perception visuelle des petites quantités.

Exemple :
Matériel : 2 poupées et des assiettes (plus que 2 assiettes).
Tâche : Mettre juste ce qu'il faut comme assiettes pour qu'il y ait une assiette par poupée.
Comparer plusieurs collections à une collection donnée en se limitant à déterminer celle où il y en a autant que dans la collection de référence, par perception visuelle.
Exemple :
Matériel : 2 poupées, une boîte avec une assiette, une boîte avec 2 assiettes bien visibles, une boîte avec 3 assiettes bien visibles.
Tâche : Trouver la boîte d'assiettes pour que chaque poupée ait une assiette et qu'il ne reste pas d'assiette.
Exemple avec autant que : «*Il y a une assiette pour chaque poupée. Il n'y a pas de poupée sans assiette. Il ne reste pas d'assiette sans poupée. Il y a autant de poupées que d'assiettes.*»
L'enseignant nomme les quantités en utilisant les itérations de 1 pour distinguer 1 et 2. Exemple : «*Il y a deux assiettes : une assiette et encore une assiette, ça fait deux assiettes.*»
Réaliser une collection dont la quantité est indiquée par l'enseignant (1 ou 2) par perception visuelle des petites quantités.
Exemple :
Matériel : des assiettes (plus que 2).
Tâche : Prendre 2 assiettes.
L'enseignant a indiqué clairement la quantité dans la consigne et explicite lors du bilan, la décomposition de 2 («*deux, c'est un et encore un*»).
- Indiquer la quantité d'une collection (1 ou 2) par perception visuelle des petites quantités.

Exemple : Combien y a-t-il de poupées?
L'enseignant explicite la décomposition de 2 («*deux, c'est un et encore un*»).
Étayage langagier par l'enseignant après l'activité des élèves lors de la validation
- Formaliser l'introduction des mots-nombres désignant les quantités 1 et 2 puis 3.
- Verbaliser la décomposition de 2 pour distinguer les quantités 1 et 2 («*deux c'est un et encore un*») et de 3 («*trois, c'est un et encore un et encore un*»).
- Verbaliser la décomposition de 3 permettant de distinguer les quantités 2 et 3 («*trois c'est deux et encore un*»).

Les types de situations et procédures sont les mêmes pour les quantités de 1 à 3. L'enseignant nomme les quantités en utilisant les itérations de 1 pour distinguer 1, 2 et 3.
Exemple : «*Il y a trois assiettes : une assiette et encore une assiette et encore une assiette, ça fait trois assiettes.*»
L'enseignant verbalise la décomposition de 3 pour distinguer 2 et 3.

Exemple : «*Il y a trois assiettes : deux assiettes et encore une assiette, ça fait trois assiettes.*»

ETAPE 3 : LES PROCEDURES VISUELLES POUR COMPARER DES QUANTITES

Objectifs

- Comparer des quantités **sans faire intervenir la suite numérique orale.**
- Comprendre ce que signifie «*plus que*» et *«moins que*».

Types de situations et procédures

- Comparer deux quantités de collections en se limitant à étudier s'il y en a autant dans chaque collection et en utilisant la perception visuelle due à la grande différence de quantités.

Exemple :

Matériel : 5 poupées d'un côté et 12 assiettes éloignées des poupées.

Tâche : Dire s'il y a juste ce qu'il faut comme assiettes pour que chaque poupée ait une assiette etqu'il ne reste pas d'assiette. On n'a pas le droit de bouger les poupées ou les assiettes.

L'enseignant introduit les termes «***plus que***» et *«**moins que***». «*Il y a plus d'assiettes que de poupées, car quand on met une assiette à chaque poupée, il reste des assiettes. Il y a moins de poupées que d'assiettes.*»

Comparer deux quantités de collections en indiquant la plus grande ou la plus petite et enutilisant la perception visuelle due à la grande différence de quantités.

Exemple :

Matériel : 5 poupées d'un côté et 12 assiettes éloignées des poupées

Tâche : Dire s'il y a plus d'assiettes que de poupées ou plus de poupées que d'assiettes. L'enseignant revient sur la signification des termes *«plus que*» et «*moins que*».

Comparer deux quantités de collections (les quantités ne dépassent pas 3) en indiquant la plusgrande ou la plus petite et en utilisant la perception visuelle des petites quantités.

Exemple :

Matériel : 2 poupées d'un côté et 3 assiettes éloignées des poupées.

Tâche : Dire s'il y plus d'assiettes que de poupées ou plus de poupées que d'assiettes.

L'enseignant verbalise les décompositions de 2 et 3 pour comparer les quantités. «*Trois, c'est deux et encore un; c'est plus grand que deux*».

Étayage langagier par l'enseignant après l'activité des élèves lors de la validation

Formaliser l'utilisation des termes «plus que» et «moins que».

ETAPE 4 : LA RECONNAISSANCE ET DESIGNATION DES QUANTITES DE 1 A 4 A PARTIR DE LA RECONNAISSANCE VISUELLE DES PETITES QUANTITES ET DES DECOMPOSITIONS ET RECOMPOSITIONS

Objectifs

- Construire les quantités jusqu'à 4 **sans faire intervenir la suite numérique orale**.
- Comprendre les décompositions des nombres jusqu'à 4.
- Consolider la signification des termes *«plus que*» et *«moins que*».

Types de situations et procédures

- Réaliser une collection de quantité égale à la collection proposée (jusqu'à 4) en s'appuyant sur la décomposition et la perception visuelle des petites quantités.

Exemple :

Matériel : 4 poupées et des assiettes (plus que 4). Les 4 poupées sont disposées de façon à faire apparaître soit la décomposition 1 et 3, soit la décomposition 2 et 2.

Tâche : Mettre juste ce qu'il faut comme assiettes pour qu'il y ait une assiette par poupée.

Comparer les quantités de plusieurs collections à une collection donnée (jusqu'à 4) en se limitant à déterminer celle où il y en a autant que dans la collection de référence, en s'appuyant sur la décomposition et la perception visuelle des petites quantités.

Exemple :

Matériel : 4 poupées, une boîte avec une assiette, une boîte avec 2 assiettes bien visibles, une boîte avec 3 assiettes bien visibles, une boîte avec 4 assiettes bien visibles. Les poupées et les assiettes sont disposées de façon à faire apparaître soit la décomposition 1 et 3, soit la décomposition 2 et 2.

Tâche : Trouver la boîte d'assiettes pour que chaque poupée ait une assiette et qu'il ne reste pas

d'assiette. L'enseignant introduit le nombre 4 comme étant «***trois et encore 1*** **»** puis introduit la décomposition *«quatre, c'est deux et encore deux*».
Réaliser une collection dont la quantité est indiquée par l'enseignant (de 1 à 4) en s'appuyant sur la décomposition et la perception visuelle des petites quantités.
Exemple :
Matériel : des assiettes (plus que 4).Tâche : Prendre 4 assiettes.
L'enseignant explicite les décompositions de 2, 3 et 4. «*Quatre c'est trois et encore un ou deux et encore deux*».
Comparer deux quantités de collections (les quantités ne dépassent pas 4) en indiquant la plus grande ou la plus petite et en utilisant la décomposition et la perception visuelle des petites quantités.
Exemple :
Matériel : 4 poupées d'un côté et 3 assiettes placées à distance des poupées.
Tâche : Dire s'il y plus d'assiettes que de poupées ou plus de poupées que d'assiettes.La décomposition mise en avant est celle qui permet de comparer les deux quantités.
Pour l'exemple ci-contre, la décomposition de 4 comme étant 3 et encore 1 permet de dire qu'il y a plus que 3.
Indiquer la quantité d'une collection (jusqu'à 4) en s'appuyant sur la recomposition et la perception visuelle des petites quantités.
Exemple : Combien y a-t-il d'assiettes?
Même si la quantité est reconnue directement sans recompositions, l'enseignant les explicite. Pour l'exemple ci-contre : «*Il y a deux assiettes et encore deux assiettes, ça fait quatre assiettes*.»

Étayage langagier par l'enseignant après l'activité des élèves lors de la validation
Introduire le nombre 4 à partir de la décomposition avec 1 et 3 puis avec celle de 2 et 2.

ETAPE 5 : LA RECONNAISSANCE ET LA DESIGNATION DES QUANTITES DE 1 A 6 A PARTIR DE LA RECONNAISSANCE VISUELLE DES PETITES QUANTITES ET DES DECOMPOSITIONS ET RECOMPOSITIONS OU A PARTIR DES DISPOSITIONS EN CONSTELLATION

Objectifs
- Construire les quantités jusqu'à 6 **sans faire intervenir la suite numérique orale.**
- Comprendre les décompositions avec le nombre 1 des nombres jusqu'à 6 (Ex : «*six, c'est cinq et encore un*»).
- Commencer à reconnaître les quantités disposées comme les constellations du dé. - Commencer à déterminer une quantité à partir d'une composition (ex : «*quatre et encore un, ça fait cinq*»; «*quatre et encore deux, ça fait six*»).

Les types de situation sont les mêmes qu'à l'étape précédente.

Dans un premier temps, les collections de quantités 5 et 6 sont disposées de façon à faire apparaître l'ajout d'un élément au nombre précédent.
L'enseignant introduit les nombres 5 et 6 comme étant respectivement *«quatre et encore un*» et *«quatre et encore un et encore un*» ou «*cinq et encore un*».
Les dispositions en constellations du dé sont introduites. La quantité est toujours déterminée à partir des décompositions. La constellation du 5 peut être explicitée à partir de la décomposition de 4 et 1 et la constellation du 6 avec soit la décomposition de 4 et 1 et 1, soit de 5 et 1. L'objectif est d'arriver, au fil des séances, à une reconnaissance immédiate des quantités lorsque les collections ont cette disposition.
Au fil des séances, d'autres décompositions peuvent être introduites. Pour l'exemple de six assiettes ci-dessus, après avoir explicité la quantité six comme étant « *quatre et encore un et encore un* », la décomposition de six comme étant « *quatre et deux* » est verbalisée.
Les recompositions sont explicitées pour déterminer la quantité d'une collection dans laquelle deux sous-collections sont bien visibles. Dans l'exemple de six assiettes, la quantité 6 est trouvée à partir de la recomposition de 5 et 1 ou 4 et 2.
Étayage langagier par l'enseignant après l'activité des élèves lors de la validation :
- Formaliser l'introduction des nombres 5 et 6 à partir des décompositions avec 1 : *«5 c'est quatre et*

encore un», «*6 c'est quatre et encore un et encore un, c'est cinq et encore un*».
- Introduire d'autres décompositions comme «*six, c'est trois et encore trois*».
- Verbaliser les recompositions qui permettent de déterminer des quantités.

ETAPE 6 : LA DESIGNATION DES QUANTITES JUSQU'A 6 EN COMPTANT DE UN EN UN ET EN S'APPUYANT SUR LES DECOMPOSITIONS ET RECOMPOSITIONS

Objectifs

- Comprendre l'utilisation de la suite numérique orale pour désigner les quantités jusqu'à 6**.**
- Comprendre que, dans la suite numérique orale, le nombre qui suit un autre correspond à la quantité précédente en ajoutant une unité.

Pour comprendre l'utilisation de la suite numérique orale servant à déterminer la quantité d'une collection, il est nécessaire de savoir déjà dire cette quantité en utilisant les décompositions et la perception visuelle des petites quantités. Il faut aussi connaître la suite numérique orale au moins jusqu'au nombre désignant la quantité.
Les types de situation à proposer sont les mêmes qu'à l'étape précédente.
Lors des premières séances, c'est l'enseignant qui explicite l'utilisation de la suite numérique orale après que les élèves ont trouvé la quantité avec une autre procédure.

Exemple :

Les élèves ont déterminé que la collection contient 4 assiettes à partir de la disposition en sachant que «*trois et encore un, ça fait quatre*».
L'enseignant valide ces procédures puis explicite le comptage de un en un en prenant soin de désigner la sous-collection qui correspond au nombre indiqué.
L'enseignant compte «un» en montrant une assiette, «deux» en montrant deux assiettes et ainsi de suite.
Cette procédure de comptage de un en un avec la suite numérique orale est utilisée plusieurs fois par l'enseignant avant de la demander aux élèves.

Étayage langagier par l'enseignant après l'activité des élèves lors de la validation :

Introduire l'utilisation de la suite orale des nombres pour désigner une quantité puis consolider cette utilisation.

ETAPE 7 : LA DESIGNATION DES QUANTITES JUSQU'A 10 EN COMPTANT DE UN EN UN ET EN DECOUVRANT QUELQUES DECOMPOSITIONS ET RECOMPOSITIONS

Aucune étude n'indique qu'un élève ayant acquis le nombre 5 pourrait se trouver en difficulté pour construire le reste des quantités. La consolidation jusqu'à 10 (objectif de fin de l'école maternelle) se fait de la même manière que précédemment.

ETAPE 8 : LES QUANTITES AU-DELA DE 10

Les compétences à faire acquérir à tous les élèves en fin de cycle 1 se limitent aux quantités jusqu'à 10. Cependant, les élèves doivent aussi maîtriser la comptine numérique jusqu'à 30 et dans le cadre de la mémorisation de cette comptine ils seront amenés à compter des éléments de collections ayant un cardinal supérieur à 10. Les décompositions et recompositions à expliciter et à utiliser pour les nombres au-delà de 10 sont prioritairement celles faisant intervenir le nombre 10. Exemple : «*Douze, c'est dix et deux*» ou inversement *«dix et deux, ça fait douze*».

Les écritures chiffrées des nombres

L'écriture chiffrée d'un nombre est un symbole qui, quand on le connaît, permet de garder la mémoire de la quantité. C'est donc un écrit du même type que le langage écrit. Les recommandations du programme à propos du langage écrit s'appliquent aussi pour l'écriture chiffrée des nombres.
Les écritures chiffrées sont présentées par l'enseignant lorsque les quantités qu'elles représentent peuvent déjà être désignées oralement par les élèves. Elles doivent apparaître comme un moyen de garder en mémoire ces quantités. Comme pour le langage écrit, l'écriture des chiffres par les élèves eux-mêmes ne s'effectue que lorsqu'ils sont capables de les décoder c'est-à-dire de traduire les écritures chiffrées en désignation orale.

Trois types de situations font intervenir l'écriture chiffrée :

- réaliser une collection dont la quantité est indiquée par l'écriture chiffrée;

- indiquer, par une écriture chiffrée, la quantité d'une collection;
- comparer deux quantités données par leurs écritures chiffrées.

Elles sont à proposer aux élèves qui savent déjà résoudre ces situations lorsqu'elles font intervenir la désignation orale des nombres. Ainsi, à la fin de l'étape 6, des situations faisant intervenir les écritures chiffrées des nombres de 1 à 6 peuvent être proposées aux élèves qui savent résoudre les situations décrites dans cette étape.

Programmation de l'enseignement de la fonction ordinale des nombres

Deux types de situation sont cités dans les compétences attendues des enfants en fin d'école maternelle : exprimer la position d'un objet ou d'une personne et comparer des positions. Dans les deux cas, la collection d'éléments n'est pas du même type que celle faisant intervenir le nombre en tant que quantité. Les procédures sont différentes. La collection est organisée en une suite d'éléments avec une origine et un sens qu'il faut prendre en compte. Ex : dire que la lettre C est en 2e position dans le mot ÉCOLE est correct si on prend comme sens celui de la lecture en commençant par la lettre É. Les mots désignant des positions n'étant pas les mêmes que ceux utilisés pour désigner des quantités, il est nécessaire de les connaître. Il faut donc que les enfants apprennent la suite numérique orale des nombres ordinaux. Pour désigner la position de la lettre L dans le mot ÉCOLE en prenant le sens de la lecture, on peut soit compter de un en un (comptage-énumération) les lettres avec la suite numérique orale des nombres ordinaux (première lettre, deuxième lettre, etc.), soit compter le nombre de lettres avant la lettre L en utilisant la suite numérique orale des nombres cardinaux puis savoir que la position de l'élément suivant le groupe de trois éléments s'appelle «quatrième». Il est donc nécessaire d'avoir déjà compris le nombre en tant que quantité avant d'aborder le nombre en tant que **position**. La comparaison de positions nécessite de savoir désigner les positions. Aussi ce type de situations intervient lorsque cette dernière compétence est acquise. Beaucoup de situations ordinaires de vie de classe permettent de convoquer le nombre en tant que position, mais il est nécessaire de proposer des situations spécifiques (voir l'ex. de situation en partie 2 et celui du jeu de piste dans cette partie).

Programmation de l'enseignement de la résolution de problèmes

Les problèmes numériques évoqués dans le programme portent sur des nombres en tant que quantité (composition de deux collections, ajout ou retrait à une collection, produit ou partage) ou sur des nombres en tant que position (déplacements en avant ou en arrière).

Un problème arithmétique met en jeu plusieurs nombres portant sur des quantités ou sur des positions. Il est nécessaire d'avoir déjà acquis l'utilisation de ces nombres en tant que quantité ou position avant de proposer le problème arithmétique. Ex : le problème consistant à trouver la quantité totale de deux collections de quantités respectives 3 et 1 peut être proposé aux élèves ayant déjà acquis une procédure permettant de déterminer les quantités jusqu'à 4. Au cycle 1, il n'est pas attendu des élèves d'utiliser les opérations et le langage mathématique «*plus, moins, égal*». Trois critères sont à prendre en compte pour prévoir la programmation dans la résolution des problèmes arithmétiques : le type de problème, les quantités mises en jeu par le problème (elles doivent aller jusqu'à 10 en fin de maternelle, et peuvent être supérieures avec certains élèves) et le matériel à disposition.

Les types de problèmes et les quantités en jeu

- Les problèmes les plus faciles sont les problèmes de recherche de la quantité totale dans un problème de réunion de quantités ou de recherche de la quantité finale pour un ajout à une quantité. Ces problèmes peuvent être proposés dès que les élèves sont capables de déterminer les quantités impliquées dans le problème. Ex : «*Une boîte contient deux bouchons. J'ajoute un bouchon. Combien y a-t-il de bouchons dans la boîte maintenant*?». Ce problème peut être proposé aux élèves sachant déterminer les quantités jusqu'à 3 (à la fin de l'étape 2 du nombre en tant que quantité).
- Les problèmes de recherche d'une des quantités dans une réunion de quantité ou de recherche de la quantité finale pour un retrait d'une quantité, présentent plus de difficultés que ceux dont un exemple est proposé ci-dessus. Ils sont donc à proposer lorsque l'élève est capable de résoudre les précédents.
- Viennent ensuite les problèmes de groupements ou de partage.

Exemple de problème de groupement : «*J'ai six crayons. Je les range par paquet de deux. Combien cela me fait-il de paquets?*»

Exemple de problème de partage : «*J'ai six perles. Je veux faire deux bracelets. Je veux que les deux bracelets aient le même nombre de perles. Combien y aura-t-il de perles dans chaque bracelet ?*»

Le matériel à disposition

La difficulté de résolution d'un même problème dépend du fait de pouvoir utiliser ou non du matériel pour représenter les quantités et réaliser l'action du problème. Au cours du cycle 1, l'utilisation du matériel évolue et 4 étapes peuvent être définies.

ETAPE 1 : L'ENSEIGNANT UTILISE DU MATERIEL VISIBLE

Objectif : il n'est pas encore de résoudre un problème puisque la résolution est prise en charge par l'enseignant. Cette étape sert à familiariser l'élève avec une situation de composition decollections, de transformation d'une collection, de groupement de collections ou de partage d'une collection.

L'enseignant énonce le problème en réalisant l'action au fur et à mesure avec du matériel visible. La quantité correspondant au résultat est visible. Les élèves utilisent une des procédures qu'ils connaissent pour déterminer le résultat. Les procédures possibles dépendent des quantités en jeu.

Exemple 1 pour des élèves ayant acquis le nombre en tant que quantité jusqu'à 3

Matériel : des images de pommes, une image de panier.

Énoncé du problème et action de l'enseignant : «*J'ai deux pommes dans mon panier*.» L'enseignant montre les deux images de pommes posées dans l'image du panier. Il explicite la quantité «*une pomme et encore une pomme, deux pommes dans mon panier*». «*J'ajoute une pomme.*» L'enseignant ajoute une image de pomme et montre l'image du panier avec l'ensemble des images de pommes. «*Maintenant, combien y a-t-il de pommes dans mon panier ?*» La quantité finale ne dépassant pas 3, les élèves peuvent la déterminer en la reconnaissant visuellement. L'enseignant valide la réponse en énonçant la recomposition effectuée : «*deux pommes et encore une pomme, ça fait trois pommes*».

Exemple 2 pour des élèves maîtrisant les nombres au-delà de 5

Le panier contient 4 pommes et on ajoute 3 pommes. Les élèves peuvent déterminer la quantité finale par comptage de un en un ou à partir de la recomposition de 4 et 3 s'ils la connaissent. Ces procédures sont explicitées par l'enseignant. Pour la validation, les images de pommes peuvent être disposées pour faire apparaître la constellation 6 et une pomme à côté. Le résultat est «*six et encore un, ça fait sept*».

Étayage langagier par l'enseignant après l'activité des élèves lors de la validation

Expliciter les recompositions ou décompositions qui permettent de trouver le résultat.

ETAPE 2 : LES ELEVES DISPOSENT D'OBJETS CORRESPONDANT AU CONTEXTE DU PROBLEME

Objectif : Comprendre un énoncé de problème en étant capable de réaliser l'action décrite par l'énoncé.

Les élèves disposent des objets correspondant au contexte du problème en plus grand nombre que nécessaire. L'enseignant énonce le problème et les élèves réalisent l'action au fur et à mesure avec le matériel. Grâce à leur action, la quantité correspondant au résultat est visible. Les élèves utilisent une des procédures qu'ils connaissent pour déterminer le résultat.

Exemple pour des élèves ayant acquis le nombre en tant que quantité jusqu'à 4 :

Matériel : des images de pommes, une image de panier

Problème énoncé par l'enseignant : «*Dans ton panier, il y a trois pommes. Tu ajoutes une pomme dans ton panier. Maintenant, combien y a-t-il de pommes dans ton panier ?*»

Il est attendu que les élèves exécutent l'action au fur et à mesure. Ils placent trois images de pommes puis en ajoutent une. Ils peuvent trouver la quantité finale soit en reconnaissant la quantité 4 visuellement, soit en sachant que «*trois et un, ça fait quatre*», soit en comptant de un en un si cette procédure a déjà été travaillée, mais ce n'est pas un prérequis indispensable.

Étayage langagier par l'enseignant après l'activité des élèves lors de la validation

Expliciter les recompositions ou décompositions qui permettent de trouver le résultat.

ETAPE 3 : LES ELEVES DISPOSENT D'OBJETS SYMBOLIQUES

Objectif : Comprendre qu'on peut remplacer les objets du contexte du problème par d'autres objets plus symboliques comme des cubes ou des jetons.
Les élèves disposent d'objets qui ne sont pas ceux du contexte du problème, mais qui permettent de symboliser les objets du problème (cubes ou jetons). L'enseignant énonce le problème et les élèves réalisent l'action au fur et à mesure avec le matériel. Grâce à leur action, la quantité correspondant au résultat est visible. Les élèves utilisent une des procédures qu'ils connaissent pour déterminer le résultat.

Exemple 1 : même exemple que précédemment, mais les élèves ne disposent que de cubes
Exemple 2 pour des élèves ayant acquis le nombre en tant que quantité au-delà de 5
Les élèves disposent de cubes pour illustrer le problème suivant : «*Le panier contient six pommes et on ajoute deux pommes*». Les élèves peuvent déterminer la quantité finale soit par comptage de un en un, soit à partir de la recomposition de 6 et 2 s'ils la connaissent, soit par surcomptage. Cette dernière procédure nécessite de savoir dire la suite numérique orale en commençant à un nombre différent de 1. Ces procédures sont explicitées par l'enseignant.
Étayage langagier par l'enseignant après l'activité des élèves lors de la validation
- Rappeler les recompositions.
- Expliciter le surcomptage lorsque cette procédure permet derésoudre le problème.

ETAPE 4 : LES ELEVES NE DISPOSENT PAS D'OBJETS MANIPULABLES
Objectif : Comprendre qu'à défaut d'objets, on peut utiliser ses doigts ou un dessin.
L'enseignant réalise l'action avec du matériel visible en énonçant le problème, mais la quantité correspondant au résultat n'est pas visible. Les élèves ne disposent pas d'objets manipulables. Sans matériel, la procédure visée est l'utilisation des doigts. Une feuille et un crayon peuvent être proposés pour amener les élèves à représenter la situation afin de déterminer le résultat en utilisant une des procédures qu'ils connaissent.

Exemple pour des élèves ayant acquis le nombre en tant que quantité jusqu'à 8 au moins
Les élèves ne disposent d'aucun matériel. L'enseignant montre le panier contenant 4 pommes.
Ensuite, il dit qu'il ajoute 3 pommes. Il montre ces 3 pommes, mais il cache ensuite le panier avec toutes les pommes ce qui empêche de déterminer la quantité finale par comptage de un en un. L'élève peut s'aider de ses doigts pour représenter les quantités. La quantité finale peut être trouvée en comptant de un en un le total de doigts, en surcomptant de 3 à partir de 4 ou avec la recompositionde 4 et 3. Ces procédures sont explicitées par l'enseignant.
Étayage langagier par l'enseignant après l'activité des élèves lors de la validation
- Rappeler les recompositions.
- Expliciter le surcomptage lorsque cette procédure permet derésoudre le problème.

Comment enseigner les mathématiques en articulant les quatre modalités spécifiques d'apprentissage de l'école maternelle ?

Le programme de l'école maternelle de 2021 précise que «*l'enseignant met en place dans sa classe des situations d'apprentissage variées structurées autour d'un objectif pédagogique précis [...] les choisit selon les besoins du groupe classe et ceux de chaque enfant.*» Dans ce but, il mobilise et articule les 4 modalités spécifiques d'apprentissage de l'école maternelle :
- apprendre en jouant;
- apprendre en réfléchissant et en résolvant des problèmes concrets;
- apprendre en s'exerçant;
- apprendre en se remémorant et en mémorisant.
Pour l'enseignant, l'enjeu est de réussir à trouver un équilibre et une articulation entre ces quatre modalités d'apprentissage en fonction de l'âge des élèves, de leurs capacités et de leurs centres d'intérêt. Les quatre modalités d'apprentissage peuvent se recouper, se superposer, se succéder au cours d'une même séquence d'apprentissage. Il est donc important de ne pas organiser ces quatre modalités de façon cloisonnée. Ainsi, par ex., le jeu de la bataille par sa répétition constitue une

condition d'exercice de la compétence « *Utiliser le dénombrement pour comparer deux quantités* ». Dans ce jeu, les modalités « *apprendre en jouant* » et « *apprendre en s'exerçant* » sont mobilisées en même temps pour renforcer les apprentissages. Le jeu peut permettre de proposer des situations d'évaluation des acquis.

Privilégier le jeu : apprendre en jouant

Les activités ludiques visent des apprentissages précis. C'est une modalité pédagogique adaptée à la diversité des élèves qui permet une mise en œuvre progressive des apprentissages.

Les jeux symboliques

De la PS à la GS, les jeux symboliques (ex : jeux dans l'espace garage ou dans l'espace cuisine) introduisent et renforcent de nombreux apprentissages mathématiques (comparer des collections, réaliser une collection de mêmes cardinaux qu'une autre, résoudre des problèmes d'ajout ou de retrait, de partage…). L'enseignant, à partir d'une observation des élèves en situation de jeu, met à profit les découvertes incidentes pour les transformer en apprentissages structurés.
- Réaliser une collection de quantité égale à la collection proposée par perception visuelle des petites quantités.
- Réaliser une collection dont la quantité est donnée oralement ou par écrit.

Exemple d'apprentissages mathématiques consolidés au cours des jeux symboliques en petite section

Dans une classe de PS, des jeux dans l'espace garage avec des véhicules de toutes sortes sont proposés de nombreuses fois au cours de l'année. L'enseignant donne une place importante à l'observation et à l'imitation des autres enfants et de l'adulte. Il observe les élèves dans leur jeu libre afin de mieux les connaître, de relancer leur activité à partir de leurs découvertes mais aussi d'observer leur niveau d'acquisition.
Il introduit les nombres de 1 à 4 dans l'ordre et sans utiliser la suite orale des nombres. Lorsqu'il joue dans l'espace garage avec les élèves et qu'il veut prendre trois véhicules, il utilise les gestes professionnels qui mettent en scène l'itération de l'unité et les décompositions additives des nombres jusqu'à 4 :
- pour prendre une collection de deux voitures, il annonce «deux» à haute voix, montre le nombre deux avec les doigts de la main, puis pioche en faisant la correspondance terme à terme entre les doigts et les voitures; il utilise un geste de la main pour expliciter aux élèves que le mot «deux» désigne la collection de voitures ;
- il déplace les voitures une à une en théâtralisant l'itération de l'unité «*deux voitures c'est une voiture et encore une voiture*.». Il demande ensuite aux élèves de lui donner «*deux voitures, une voiture et encore une voiture*.». Il explicite que «*deux c'est un et encore un*.» ;
- il reproduit ce procédé lorsqu'il prend trois voitures : «*trois voitures, c'est une voiture et encore une voiture et encore une voiture*» puis en utilisant la décomposition «*trois voitures, c'est deux voitures et encore une voiture*.».
Des élèves de PS jouent à produire les collections d'une puis deux voitures. Sollicités par le PE, ils constituent ensuite des collections de trois puis quatre voitures. Ils commencent à comprendre que lorsqu'ils ont trois voitures il suffit d'ajouter une voiture pour obtenir une collection de quatre voitures ou de retirer une voiture pour avoir une collection de deux voitures.

Réalisation de collections équipotentes

L'introduction de figurines d'oursons permet aux élèves de se confronter à un nouveau problème. Ils doivent chercher juste ce qu'il faut de voitures pour que chaque ourson ait une voiture.

Comparaison de collections de véhicules

Par ses interventions, l'enseignant relance l'activité en amenant progressivement les élèves à comparer les quantités de deux collections, une collection d'oursons et une collection de voitures (ou deux collections de véhicules). La validation est effectuée en utilisant la correspondance terme à terme. Ces comparaisons conduisent les élèves à échanger et à apprendre un vocabulaire et une syntaxe spécifiques. L'enseignant accompagne chaque élève dans ses premiers essais, se montre désireux de mieux le comprendre en posant des questions ouvertes, en demandant des précisions et en l'invitant à reformuler son propos. Il reprend ses productions orales pour lui apporter des mots ou des structures de phrases plus adaptés qui l'aident à progresser. Par ex : «*Il y a plus d'oursons que de voitures*.»; «*Il y a moins de voitures que d'oursons*.»; «*Il y a autant* (ou la même quantité) *d'oursons que de camions*.»

Comparaison de collections
Les activités de comparaison de collections conduisent à ordonner les collections de voitures et d'oursons selon leur quantité. Chaque collection est placée dans une boîte. Les boîtes sont ordonnées en fonction de la quantité d'objets qu'elles contiennent.

Concevoir une programmation de jeux impliquant des nombres

L'organisation des jeux se pense dans le cadre d'une réflexion d'équipe avec un choix de jeux de référence (exemples : jeu de l'oie, jeu du gobelet, jeu de la boîte, Greli-Grelo, Bataille, Halli-Galli, Mémory, loto) qui reflète une progression et une programmation tout au long du cycle en fonction des apprentissages mathématiques visés. Les progrès des élèves ne sont pas corrélés au nombre de jeux utilisés. Plutôt que de multiplier l'utilisation de jeux différents, il est préférable de faire évoluer un jeu connu des élèves en jouant sur les variables didactiques avec l'objectif de découvrir ou de renforcer une procédure précise.

Un exemple de jeu de référence : le jeu de l'oie
Les jeux de déplacement sur piste du type «jeux de l'oie» permettent aux élèves de faire le lien entre nombres et espace. Des parcours rectilignes avec des cases numérotées et de même taille sont à privilégier.
Dans une note de février 2022, le conseil scientifique de l'éducation nationale précise que la recherche montre que dès l'école maternelle ce type de support «*aide notamment les élèves à comprendre que tous les nombres entiers 1, 2, 3… sont ordonnés et également espacés (acquisition d'une représentation linéaire des quantités); que plus le nombre est grand, plus il se situe vers la droite; et qu'additionner ou soustraire correspondent à des déplacements à droite ou à gauche sur cette bande numérique. Les jeux de plateau, type "jeu de l'oie" ou "petits chevaux", où l'on avance un personnage dans l'espace, d'un nombre de cases correspondant à un coup de dés, facilitent la compréhension de la bande numérique. Les enfants qui y jouent progressent plus vite que les autres en mathématiques.*»
L'accueil facilite la mise en œuvre de jeux en relation duelle entre élèves ou avec l'enseignant. Un parcours avec un nombre restreint de cases permet de limiter la durée des parties à 5-10 mn, ce qui motive les élèves à rejouer et facilite l'organisation des temps de jeu.
Conception du jeu
- Un parcours rectiligne plutôt que tordu.
- Des cases toutes de même taille avec les nombres dans l'ordre dans chacune des cases.
- Des cases bonus ou pénalités en lien avec les nombres (avancer de deux cases, reculer de trois cases, etc.) sont introduites progressivement pour relancer l'intérêt du jeu.
- Un dé puis deux dés adaptés.

Variables didactiques
Type de dés utilisés :
- Deux dés avec constellations permettent de compter les points de chaque dé et les points de l'ensemble (introduction des recompositions);
- Un dé avec des chiffres et un dé avec des constellations permettent de travailler les recompositions et le surcomptage;
- Deux dés avec des chiffres permettent d'encourager les recompositions s'appuyant sur la mémoire avec vérification éventuelle avec les doigts.

Quantités en jeu : dés pointés avec uniquement des constellations de 1 ou 2 points, 1 à 3 points, 1 à 5 points et des dés chiffrés adaptés aux connaissances des élèves
Taille de la piste : elle dépend de la taille des nombres travaillés et de la règle du jeu (par ex : pour gagner un pion doit-il dépasser la case d'arrivée ou arriver exactement sur cette case ?).

Progression pour le cycle 1
À chaque étape de la progression, on modifie les informations portées sur les dés pour contraindre l'élève à faire évoluer ses procédures. Le jeu avec deux dés est plus intéressant en mathématiques, car il permet de renforcer la connaissance des décompositions et des recompositions des nombres que les

élèves ont déjà travaillées. La procédure de surcomptage est également explicitée et consolidée en utilisant deux dés.

Jeu avec	Objectifs	PS	MS	GS
un dé pointé (en constellation)	Associer une quantité de points et un déplacement	x		
un dé chiffré	Associer une écriture chiffrée à une quantité et à un déplacement		x	
deux dés pointés	Dénombrer, surcompter ou calculer la quantité totale de points obtenus	x	x	x
un dé pointé et un dé chiffré	Surcompter ou calculer la quantité totale de points obtenus		x	x
deux dés chiffrés	Surcompter ou calculer la quantité totale depoints obtenus Utiliser les mémorisations? 4 et 2 ça fait 6			x

Verbalisation
Durant la partie, après chaque jet de dé, l'élève verbalise la quantité de points obtenus, la case de départ, les numéros des cases parcourus par son pion et le numéro de la case d'arrivée.
L'enseignant reformule et structure en tant que de besoin. Ex : *« Je suis sur la case 2 ». « J'ai fait 3. » (L'élève déplace son pion en oralisant 1, 2, 3) « j'arrive sur la case 5. »*

Arrêts sur image
Une fois que les élèves se sont bien appropriés le jeu, l'enseignant propose des arrêts sur image pour amener les élèves à anticiper un déplacement : «*« Tu es sur la case 2, tu as fait 3. Sur quelle case penses-tu que tu vas arriver ? »*
Verbalisation de l'élève *: « Je suis sur la case 2 ». « J'ai fait 3. » « Je pense que je vais arriver sur la case 5. »* Les élèves commencent à repérer et à verbaliser que «*Faire 3 et 2 c'est la même chose que faire 2 et 3. » « On peut changer l'ordre des nombres, mais on arrive sur la même case. ».* Ils vérifient cette affirmation en effectuant successivement les deux transformations : un déplacement de 3 puis de 2 comparé avec un déplacement de 2 puis de 3.

Jeu et résolution de problèmes
Le jeu devient également support de résolution de petits problèmes.
Ex. de problèmes proposés :
- Problèmes d'ajout ou de retrait avec recherche de l'état final : *« Zoé joue au jeu de l'oie. Son pion est sur la case 5. Elle lance le dé et fait 4. Sur quelle case son pion va -t-il arriver ? »*
« Samir joue au jeu de l'oie, son pion est sur la case 7. Il doit reculer de 2 cases. Sur quelle case son pion va -t-il arriver ? »
- Problèmes d'ajout ou de retrait avec recherche de la transformation : *« Bintou était sur la case 3, elle a lancé le dé et est arrivée sur la case 5. Combien de points avait-elle obtenu avec le dé ? »*

Jouer avec les élèves : un geste professionnel fondamental
Il est très important que l'enseignant joue fréquemment avec ses élèves et qu'il s'assure des conditions pour garantir à chaque élève suffisamment de temps pour jouer. Le moment de l'accueil est un terrain fertile pour proposer des jeux impliquant les nombres. Le jeu en relation duelle participe à la mise en confiance de l'élève fragile avec une reprise des jeux proposés à l'ensemble du groupe. La posture de l'enseignant oscille entre participation, retrait et observation. Plus disponible, le PE questionne chaque élève sur les procédures qu'il a mises en place pour réussir le jeu, les connaissances mobilisées pour résoudre un problème. Le jeu a la vertu de faire évoluer le statut de l'erreur ; perdre est différent que d'être en échec face à un exercice ce qui pousse l'élève à prendre plus de risques et avoir moins peur de se tromper.

Apprendre en réfléchissant et en résolvant des problèmes
Le sens que les élèves attribuent aux nombres constitue un enjeu essentiel des situations

d'enseignement mises en œuvre à l'école maternelle. L'objectif est d'amener les élèves à comprendre que les nombres sont un outil performant pour résoudre des problèmes. Les élèves vivent ainsi un maximum d'expériences concrètes. Les situations proposées sont construites de manière à faire apparaître le nombre comme utile pour exprimer des quantités, pour désigner un rang ou une position, pour anticiper le résultat d'une action sur des quantités (augmentation, diminution, réunion, distribution, partage) ou sur des positions (déplacements en avant ou en arrière). Il peut s'agir, par ex., de réaliser une collection de quantité identique à celle d'une collection donnée, de trouver le nombre nécessaire d'objets pour compléter une collection (dans le jeu de la marchande : «*j'en veux 8 et pour l'instant j'en ai 2*»), de trouver une quantité d'objets après l'évolution d'une collection par ajout ou retrait d'une petite quantité d'objets, de réaliser le partage équitable d'une collection.

Apprendre en s'exerçant

S'exercer est une modalité incontournable de l'apprentissage pour acquérir les automatismes et fixer les savoirs dans la mémoire. Il s'agit de reprendre une activité de classe qui n'est pas encore maîtrisée en proposant un entraînement systématique dans un contexte sécurisé. Dans tous les cas, les situations de jeu et de manipulation sont à privilégier.

Exemples de jeux pour apprendre en s'exerçant

- Matériel d'auto-entraînement pour s'entraîner à associer un code symbolique à une quantité.
- Un jeu de Memory où il faut composer le nombre 10 en associant deux nombres.
- Le nombre mystère *:* le but du jeu est de placer les nombres de 1 à 9 sur une grille de neuf cases en tenant compte de huit indices. Ces derniers sont donnés par huit dessins représentant des quantités. Il faut placer une étiquette-nombre sur chacun des huit dessins en justifiant son choix. Le nombre-mystère est l'étiquette-nombre restante. Elle est placée sur la case du point d'interrogation.

Grâce à l'entraînement, l'élève progresse, acquiert aisance et rapidité dans la réalisation des tâches, ce qui libère des ressources cognitives pour réaliser des tâches plus complexes. Il faut veiller à la répétition et à la reprise de situations de jeux semblables pour une meilleure stabilisation des connaissances et des procédures. Par automatisme, on considère les procédures mémorisées que l'élève peut mobiliser sans avoir à les reconstruire. Par ex., un élève a automatisé la procédure de surcomptage sur les doigts : «*pour faire 4 et 3, je mets 4 dans ma tête et sur mes doigts je fais 5, 6, 7*». Ces automatismes sont nécessaires, mais peuvent aussi provoquer des obstacles à l'apprentissage quand la technique apprise n'est qu'une astuce dont l'élève n'a pas compris le sens.

Apprendre en se remémorant, en mémorisant

De façon transversale, la mémorisation est nécessaire dans la grande majorité des activités proposées aux élèves de l'école maternelle. «*Les opérations mentales de mémorisation chez les jeunes enfants ne sont pas volontaires. Dès la première année de vie, les enfants s'appuient fortement sur ce qu'ils perçoivent de leur environnement. Le langage qu'ils entendent aide à l'apprentissage et joue un rôle fondamental dans les opérations de mémorisation. L'enseignant s'exprime dans une langue riche et claire, il s'attache à donner des informations explicites pour permettre aux enfants de se les remémorer. Il organise des retours réguliers sur les découvertes et acquisitions antérieures pour s'assurer de leur stabilisation, et ceci dans tous les domaines. Engager la classe dans l'activité est l'occasion d'un rappel de connaissances antérieures sur lesquelles s'appuyer, de mises en relation avec des situations différentes déjà rencontrées ou de problèmes similaires posés au groupe. L'enseignant anime également des moments qui ont clairement la fonction de faire apprendre, notamment avec des comptines, des chansons ou des poèmes. Il valorise la restitution, l'évocation de ce qui a été mémorisé ; il aide les enfants à prendre conscience qu'apprendre à l'école, c'est remobiliser en permanence les acquis antérieurs pour aller plus loin* » Programme de 2021.

Focus - Comment mobiliser des activités ritualisées qui évoluent dans le temps au service des apprentissages mathématiques ?

Une activité ritualisée est une activité proposée régulièrement aux élèves pendant une période de l'année. Elle est **en lien avec une séquence d'apprentissage**, avec des séances au cours desquelles les

élèves ont manipulé le matériel, ont expérimenté des procédures, les ont verbalisées, etc. Les activités ritualisées peuvent intervenir à différents moments de la séquence. Il va s'agir d'ancrer les apprentissages **par la répétition, l'automatisation**.
La répétition des activités ritualisées permet à tous les élèves de comprendre le but de la tâche et, ainsi, de s'engager rapidement dans la résolution du problème. L'activité ritualisée permet à l'enseignant de proposer des situations s'appuyant sur les modalités d'apprentissage de l'école maternelle ; notamment apprendre en s'exerçant et apprendre en se remémorant et en mémorisant.
Pour qu'elle serve aux apprentissages sur le nombre, elle doit **s'inscrire dans la progressio**n, ce qui signifie qu'elle doit **varier et évoluer** au cours de l'année. Les activités ritualisées se déroulent **en collectif**. Il faut donc veiller à ce qu'elles concernent **tous les élèves**. Ils doivent **tous** être impliqués dans la réalisation de la tâche. Lorsque **tous** les élèves réussissent **systématiquement** l'activité, il n'est plus intéressant de la proposer. Il faut l'abandonner ou la faire évoluer.

Exemple d'une activité ritualisée pour s'exercer aux objectifs de l'étape 4 du nombre en tant que quantité

Objectif : construire les quantités jusqu'à 4 sans faire intervenir la suite numérique orale. Comprendre les décompositions des nombres jusqu'à 4.
Type de situation et procédures : réaliser une collection de quantité égale à la collection proposée (jusqu'à 4) en s'appuyant sur la décomposition, la disposition et la perception visuelle des petites quantités.
Activité ritualisée : déterminer le nombre d'absents (lorsqu'il n'y a pas plus de 4 absents).
Matériel : les étiquettes des absents sont affichées au tableau. Chaque élève dispose de petites cartes reliées par un anneau (comme le montrent les photos ci-contre).
Les cartes évoluent. Elles comportent soit des points disposés en constellations, soit des points non disposés en constellations, soit des doigts. Le placement des étiquettes des absents évolue aussi. Elles sont disposées soit comme les constellations, soit en faisant apparaître des décompositions comme 2 (disposé en constellation) et 1pour 3 ou 3 (disposé en constellation) et 1 pour 4.
Tâche : l'élève doit trouver la carte qui correspond au nombre d'absents.
Validation : l'enseignant dispose des mêmes cartes que les élèves, mais en format agrandi pour qu'elles soient visibles par tous les élèves. Chaque carte choisie par les élèves est validée ou non par une correspondance terme à terme en plaçant chaque étiquette d'absent sur chaque point ou chaque doigt.
Verbalisation : le nombre d'absents est énoncé en indiquant une ou plusieurs décompositions de ce nombre. Ex : « *Il y a deux absents, un et encore un, ça fait deux absents* ».
Variante : la gestion des cartes reliées par un anneau peut s'avérer difficile pour des élèves de PS. Au lieu de fournir ce lot de cartes à chaque élève, on peut leur donner qu'une ou deux cartes en ne proposant pas les mêmes cartes à tous. Les élèves qui pensent avoir la carte correspondant au nombre d'absents lèvent cette carte.
Remarque : la possibilité de proposer cette activité au-delà de 4 absents dépend de la progression atteinte sur le nombre en tant que quantité. Il n'est pas recommandé de proposer une activité similaire sur le nombre de présents étant donné que ce nombre va au-delà des quantités travaillées à la maternelle.

Exemple d'une activité ritualisée pour s'exercer aux objectifs de l'étape 6 du nombre en tant que quantité

Objectif :
- Comprendre l'utilisation de la suite numérique orale pour désigner les quantités jusqu'à 6**.**
- Comprendre que, dans la suite numérique orale, le nombre qui suit un autre correspond à la quantité précédente en ajoutant une unité.

Type de situation et procédures : comparer deux quantités de collections (les quantités ne dépassent pas 6) en indiquant la plusgrande ou la plus petite et en utilisant la décomposition et le comptage de un en un.
Activité ritualisée : déterminer s'il y a plus de pots de colle ou plus d'élèves qui devront s'en servir.
Matériel : L'enseignant dispose d'images de pots de colle et d'élèves assez grandes et pouvant être

fixées au tableau. Il fixe d'un côté des images d'élèves et de l'autre côté des images de pots de colle. Les dispositions des images évoluent. Elles peuvent être en constellations pour commencer puis varier pour faire apparaître des compositions, comme 3 et 2 pour 5. Chaque élève dispose d'une image d'élève et d'une image de pot de colle.
Tâche : l'élève doit lever l'image qui correspond à l'objet en plus grand nombre (l'image d'élève s'il pense qu'il y a plus d'élèves que de pots de colle).
Validation : l'enseignant utilise la correspondance terme à terme en déplaçant chaque pot de colle près d'un élève.
Verbalisation : les nombres d'élèves et de pots de colle sont déterminés en comptant de un en un eten faisant apparaître à chaque nombre énoncé la quantité pour éviter le comptage-récitation. La comparaison est explicitée dans les deux sens, comme «*il y a plus d'élèves que de pots de colle, il y a moins de pots de colle que d'élèves*».
Remarque : L'utilisation d'un tableau numérique facilite l'aspect matériel de l'activité. Les ensembles de pots de colle et d'élèves à comparer sont déjà préparés et la validation s'effectue en déplaçant les objets.

Exemple d'une activité ritualisée pour s'exercer à la résolution d'un problème de calcul de l'état final pour un nombre en tant que position

Objectifs :
- Résoudre un problème de transformation additive avec recherche de l'état final. - Appréhender le nombre en tant que position.

Type de situation et procédures :
- Déterminer la position finale après un déplacement vers l'arrivée connaissant la position initiale et le déplacement.
- Plusieurs procédures sont possibles : comptage de un en un en s'aidant desdoigts, surcomptage à partir des doigts, résultat mémorisé.

Activité ritualisée : déterminer la case d'arrivée du pion sur la piste du jeu de l'oie, connaissant la case de départ et le nombre de cases à avancer.
Matériel : une piste rectiligne comportant un nombre de cases n'allant pas au-delà des quantités dénombrables par les élèves (la piste est assez grande et affichée au tableau), un pion pouvant tenir sur la piste,un gros dé avec deux faces de 1, de 2 et de 3 (le dé peut être muni de points ou d'écritures chiffrées), des jetons se collant sur la piste qui serviront lors de la validation. Chaque élève dispose de petites cartes comportant l'écriture chiffrée des nombres, les cartes sont reliées par un anneau.
Tâche : l'élève doit trouver la carte correspondant à la case sur laquelle le pion arrivera après le déplacement indiqué par le dé.
Validation : L'enseignant ou un élève prend le nombre de jetons correspondant au nombre indiqué par le dé, c'est-à-dire au nombre de cases à avancer. Ces jetons sont collés les uns à la suite des autres, dans chaque case de la piste en commençant par la case juste après le pion. La position du dernier jeton indique la case où le pion arrivera. Cela permet de vérifier les réponses des élèves. On peut décider de n'avancer le pion qu'à la condition que tous les élèves aient trouvé la réponse.
Verbalisation : les positions de départ et d'arrivée du pion sont formulées en utilisant les nombres de positions. Ex : «*Le pion était sur la troisième case. Il a avancé de deux cases. Il est maintenant sur la cinquième case*». Le calcul est verbalisé pour faire ressortir la composition. Ex : «*trois et deux, ça fait cinq. Le pion arrive sur la case numérotée 5.* »
Remarque : Comme pour l'activité précédente, l'utilisation d'un tableau numérique ou d'un visualiseurfacilite l'aspect matériel de l'activité.

Focus – Décomposer et composer les nombres jusqu'a 10 : un exemple de mise en œuvre des modalités spécifiques d'apprentissage de l'école maternelle.

Ce qui est attendu des élèves en fin d'école maternelle
- Quantifier des collections jusqu'à dix au moins; les composer et les décomposer par manipulations effectives puis mentales.
- Parler des nombres à l'aide de leurs décompositions.

- Dire combien il faut ajouter ou enlever pour obtenir des quantités ne dépassant pas dix.

Situations-repères pour observer les progrès des élèves : la programmation de cycle est élaborée en prenant appui sur les éléments de progressivité proposés dans le document ressource *«Observer et évaluer à l'école maternelle domaine 4»* publiée en mars 2023 sur éduscol pour élaborer une programmation d'école.

Choix d'un problème de référence

Dans cet ex., la situation des «*maisons des oursons*» est le problème de référence commun à l'ensemble des classes de l'école. Les activités présentées visent à faire découvrir et mémoriser les décompositions des nombres jusqu'à 5.

Matériel : chaque élève dispose d'une collection d'oursons et de deux couvercles de boîtes qui symbolisent deuxmaisons mitoyennes. Sur une table éloignée, l'enseignant a installé une collection de cartes où sont représentés des lits pourles oursons.

Problème de référence

Chaque élève reçoit des oursons (par exemple 5) et deux maisons. Il doit aller chercher deux cartes où sont représentés les lits. Il faut chercher une carte pour chaque maison. Les cartes comportent de zéro à cinq lits (il n'y a qu'une seule carte avec cinq lits dans la réserve). Le but du jeu est de chercher juste ce qu'il faut de lits pour que chaque ourson ait un lit.

Il faut donc associer deux cartes pour obtenir la quantité de lits souhaitée.

Proposition de consigne à élèves :

«*Deux maisons* [montrer les couvercles] *vont accueillir 5 oursons pour dormir. Vous allez installer des lits pour chaque ourson en choisissant deux cartes posées sur la table* [montrer une carte et aux élèves le nombre de lits indiqués]. *Ils auront chacun un lit, mais les oursons nedormiront pas forcément tous dans la même maison.*» La manipulation permet de partager une collection en deux sous-collections, c'est la mise à distance de ce matériel qui va aider les élèves à exprimer cette partition sous la forme d'un nombre et de l'une de ses décompositions («*5 c'est 2 et encore 3*»). Les séances présentées conduisent les élèves à des formulations du type «3 et 2» à l'oral puis à l'écrit pour décomposer le nombre 5.

Eléments de progressivité : variables didactiques, procédures possibles et problèmes proposés

À l'école maternelle, dans le respect du rythme de chacun, les élèves mémorisent les décompositions des nombres jusqu'à dix, mais aussi, de manière réciproque, les résultats de calculs additifs dont la somme est inférieure ou égale à dix. Cette approche du calcul à l'école maternelle ne doit pas inciter les enseignants à devancer les apprentissages relevant du CP. **Le signe +, notamment, ne sera introduit qu'à l'école élémentaire où l'addition trouvera véritablement le statut d'opération**.

Décomposer et composer les nombres jusqu'à dix : **tableau p. 82.**

Exemple de séquence articulant les quatre modalités spécifiques d'apprentissage de l'école maternelle

Dans cet exemple, l'enseignant met en place dans sa classe des situations d'apprentissage variées structurées autour de l'objectif de séquence *«découvrir et mémoriser les décompositions des nombres jusqu'à 5»*. Il choisit les situations selon les besoins du groupe classe et ceux de chaque enfant.

Observer et évaluer pour suivre les acquis des élèves

Dès la conception de la séquence, l'enseignant élabore une grille d'observation qui lui permettra de suivre les progrès de chaque élève. Cette évaluation positive, menée par l'observation puis l'interprétation des progrès au gré de situations aménagées, permet au PE, en visant les attendus de fin de GS, d'adapter les activités et tâches proposées en fonction des besoins de chaque enfant pour qu'il continue à progresser au sein du groupe.

La grille d'observation permet d'évaluer si l'élève réussit à :

- Composer et décomposer les nombres jusqu'à 5 en s'aidant de jetons ou de ses doigts.
- Composer et décomposer mentalement les nombres jusqu'à 5

- Mobiliser la connaissance des décompositions des nombres jusqu'à 5 pour résoudre des problèmes ainsi que dans le cadre de jeux (ex : calcul du nombre de points obtenusavec deux dés chiffrés).

Situation de recherche : problème de référence

ETAPE 1 : APPRENDRE EN JOUANT
Objectif *:* permettre aux élèves de s'approprier la situation Chaque élève reçoit une collection de 3 à 5 oursons. Il cherche différentes manières de répartir lacollection dans les deux maisons.
Synthèse : l'enseignant fait verbaliser les décompositions obtenues : *« 4 oursons c'est 2 oursons et encore 2 oursons. » ; « 5 c'est 3 et encore 2 »*

ETAPE 2 : APPRENDRE EN REFLECHISSANT ET EN RESOLVANT DES PROBLEMES CONCRETS
Objectif *:* amener les élèves à comprendre qu'à partir de deux collections de quantités connues ils peuvent trouver la quantité de la réunion de ces deux collections. Chaque élève reçoit deux cartes où sont représentés les lits des oursons. Il doit aller chercher laquantité exacte d'oursons pour qu'il y ait un ourson sur chaque lit.
Synthèse : l'enseignant fait verbaliser les compositions obtenues : *« 2 oursons et encore 1 oursoncela fait 3 oursons » « 3 et 2 cela fait 5 ».*

ETAPE 3 : APPRENDRE EN REFLECHISSANT ET EN RESOLVANT DES PROBLEMES CONCRETS
Objectif *:* amener les élèves à comprendre qu'une même quantité peut être obtenue de plusieurs manières à partir de deux autres. Chaque élève reçoit 5 oursons et deux maisons. Il doit aller chercher deux cartes où sont représentés les lits. Il faut chercher une carte pour chaque maison. Les cartes comportent de zéro à cinq lits (il n'y a qu'une seule carte avec cinq lits dans la réserve pour éviter d'obtenir que des décompositions du type «5 et 0»). Le but du jeu est de chercher juste ce qu'il faut de lits pour que chaque ourson ait un lit et qu'il n'y ait pas de lit sans ourson. Il faut donc associer deux cartes pour obtenir la quantité de lits souhaitée.
Synthèse : l'enseignant fait verbaliser les décompositions obtenues après parfois plusieurs essais : « *Pour avoir cinq lits, j'ai pris trois lits et encore deux lits.* »

Institutionnalisation : apprendre en se remémorant et en mémorisant

Objectif : amener les élèves à mémoriser les décompositions additives des nombres jusqu'à 5.
À l'issue de ces temps de recherche, les décompositions obtenues sont institutionnalisées sous forme d'affichage : pour chaque nombre, les élèves collent les décompositions obtenues avec les cartes-lits et indiquent par écrit cette décomposition. L'enseignante structure et formalise les apprentissages opérés.

Situations d'entraînement et auto-entraînement

Jeu en autonomie avec le matériel : apprendre en s'exerçant
Objectif : consolider la connaissance des décompositions des nombres jusqu'à 5. Les élèves jouent seuls ou à deux avec le matériel «*oursons et cartes-lits*» disponibles dans l'espace mathématique lors des moments de travail en autonomie ou lors des temps d'accueil en début de journée.

Jeu d'auto-entraînement

Les cartes recto verso
Jeu individuel ou à 2 joueurs, durée entre 5 et 10 min. Sur le recto des cartes figurent les compositions à effectuer, au verso, les résultats. Les cartes sont étalées sur la table, côté recto visible. Un élève propose une carte-question (recto) et l'autre y répond. On retourne la carte; si la réponse est correcte, l'élève qui a répondu gagne la carte.

Jeu d'entraînement : apprendre en jouant

Le jeu du saladier (ou du gobelet)
2 joueurs, durée entre 5 et 10 min.

Les deux joueurs choisissent la quantité totale de jetons utilisée pendant la partie et la nomment ensemble : «*Il y a cinq jetons*». Un des élèves (A) ferme les yeux pendant que l'autre (B) cache une partie des jetons sous un petit saladier (ou un bol) opaque. L'élève A doit donner la quantité de jetons cachés et justifier sa réponse. Ensuite, l'élève B lève le saladier et valide la réponse de l'élève A. La partie se joue avec cinq jetons. Un joueur cache une partie des jetons sous le saladier. Le deuxième joueur doit trouver le nombre de jetons cachés.
Le saladier est soulevé après la réponsedu joueur et sa proposition de justification.
Afin de faciliter le déroulé de chacune des parties, un dialogue ritualisé entre les deux joueurs est mis en place :
Élève B : *Ouvre les yeux. Dis-moi combien d'objets sont cachés sous le saladier ?*
Élève A : *Je pense qu'il y a 4 jetons cachés sous le saladier*
Élève B : *Comment le sais-tu ?*
Ici, il est essentiel que les jetons restent cachés pour anticiper le nombre de jetons cachés (et ne pas le constater uniquement en dénombrant le nombre de jetons cachés).
Élève A : *J'ai compté… /Je sais que…/Je connais…*
Élève B : *Nous allons vérifier ta réponse.*
Dans la partie suivante, les rôles changent.
Procédures possibles
- Comptage ou surcomptage sur les doigts.
- Utilisation de la connaissance d'un résultat mémorisé : «*3 et 2 font 5*». C'est la procédure visée.

Situations de mémorisation

Rituels mathématiques : apprendre en se remémorant et en mémorisant

Jeu de Lucky-Luke
Objectif *:* mémoriser les décompositions des nombres jusqu'à 5.
Avec toute la classe ou une demi-classe, durée entre 5 min et 10 min.
Il s'agit de «*dégainer plus vite que son (n) ombre, oui, mais, sans risque, car, ici, on dégaine ses doigts !*»
Les élèves ont les mains dans le dos, l'enseignant annonce un nombre et au signal, les élèves doivent montrer la quantité de doigts correspondante avec deux mains. Les décompositions obtenues sont formulées oralement et misesen relation avec la trace écrite élaborée précédemment avec les élèves. La synthèse permet de consolider la compréhension qu'il y a plusieurs représentations d'un nombre à l'aide de ses décompositions additives.
Variables : dire le mot-nombre oralement ou le «montrer» avec les doigts ou encore avec une collection d'objets réels ou représentés.

Jeu d'entraînement : apprendre en jouant

Jeu de Halli-Galli
À partir de 2 joueurs, durée entre 5 et 10 min.
Après une phase d'appropriation du matériel (tri et classement decartes), les élèves jouent à Halli-Galli avec l'enseignant puis en autonomie pendant le moment l'accueil. Ce jeu d'appariement de cartes a pour objectif la mémorisation des décompositions du nombre 5.
Variante : jeu avec des cartes où les nombres sont représentés avec des écritures chiffrées. On peut remplacer la sonnette par un objet (ex :un ourson à saisir avant les autres joueurs).

Situations de réinvestissement

Rituels mathématiques : apprendre en se remémorant et en mémorisant

Jeu de Greli-Grelo
Objectif *:* composer le tout à partir de deux parties distinctes (quantités jusqu'à 5).
L'enseignant (puis progressivement un élève de GS) est chargé de conduire le jeu. Il prend une quantité d'oursons dans une main et les montre à la classe. Vient alors la question «*combien d'oursons dans cette main*?» Les élèves montrent une quantité de doigts égale à la quantité d'oursons. Il reproduit cette action avec sa deuxième main et pose la même question. Il regroupe et ferme les deux mains pour former un grelot à agiter et dit *« Greli-Grelo, combien j'ai d'oursons dans mon sabot ? »* Les élèves

répondent en montrant la quantité totale avec leurs doigts puis, de plus en plus rapidement, en mobilisant la connaissance d'un résultat mémorisé.
L'élève montre 3 oursons dans une main puis la ferme. L'élève montre 2 oursons dans l'autre main puis la ferme. Il regroupe les deux mains et demande « *Combien d'oursons dans mon sabot ?* » Validation : « *J'ai 5 oursons dans mon sabot !* » « *3 et encore 2 cela fait 5.* »

Résolution de problèmes : apprendre en réfléchissant et en résolvant des problèmes concrets

Objectif *:* utiliser le nombre pour résoudre des problèmes d'ajout ou de retrait et de composition. Exemples de problèmes :
- *« Dans la boîte il y a trois jetons rouges et deux jetons bleus. Combien y a-t-il de jetons entout dans la boîte ? »*
- « J'ai deux jetons. Combien de jetons me manque-t-il pour avoir quatre jetons?»

Mémorisation de la suite orale des mots-nombres : apprendre des comptines numériques

«*Pour que la suite orale des mots-nombres soit disponible en tant que ressource pour dénombrer, il faut qu'elle soit stable, ordonnée, segmentée et suffisamment longue. Elle doit être travaillée pour elle-même et constituer un réservoir de mots ordonnés* » (programme de 2021). La mémorisation de la suite orale des mots-nombres nécessite un apprentissage spécifique pour atteindre un niveau de maîtrise suffisant :
- la segmentation correcte des mots-nombres ;
- la possibilité de commencer et de s'arrêter n'importe où ;
- la récitation à l'envers.

Les comptines et les livres à compter jouent leur rôle dans cette mémorisation.

Des comptines avec une segmentation par 1

Toutes les comptines ne se valent pas pour conduire cet apprentissage de la chaîne orale. La comptine ci-dessous est structurée avec une segmentation par 3 : *un deux trois nous irons au bois*.Cette structure peut faciliter la mémorisation des blocs de trois mots-nombres qui y figurent, mais la suite orale des mots-nombres n'est pas suffisamment segmentée si on veut que l'élève puisse distinguer les mots-nombres les uns des autres et ainsi utiliser la suite orale pour dénombrer.

1, 2, 3 Nous irons au bois
4, 5, 6 cueillir des cerises
7, 8, 9 dans mon panier neuf
10, 11, 12 elles seront toutes rouges.

Les comptines numériques, quand elles sont construites avec segmentation de la suite orale par 1 en faisant intervenir d'autres mots (ex. emprunté à Prévert : «*Une pierre, deux maisons, trois ruines…*») et non une série indifférenciée («*undeuxtroisquatrecinq…*»), permettent de mieux distinguer les mots-nombres. Cela aura une incidence sur l'apprentissage des procédures de comptage-dénombrement.

Exemple :

Les cubes 1 cube deux cubes trois cubes 4 cubes 5 cubes six cubes sept cubes 8 cubes 9 cubes, ça titube ! 10 cubes… Tous les cubes sont en tas… PATATRAS ! Et voilà !

Lors de la mise en scène de la comptine *« Les cubes »*, l'enseignant veille à dénombrer les cubes en utilisant le comptage-dénombrement. Il est vigilant à ne pas dire *« deux »* au moment où il pose le doigt sur le cube, c'est-à- dire avant que celui-ci soit déplacé, sinon l'enfant comprendra qu'il va déplacer un cube qui s'appelle «le deux», le mot «deux» fonctionnant alors comme une sorte de numéro, c'est ce comptage-numérotage qu'il faut éviter. En revanche, il veille à ne dire «deux» qu'après que le cube a été déplacé, c'est-à-dire après que la collection de deux cubes a été formée, ce qui favorise la compréhension du fait que le mot «deux» désigne une pluralité. Pour le cube suivant, le mot «trois» est prononcé seulement après que la nouvelle collection a été formée, etc. L'enseignement du comptage-dénombrement est encore plus explicite, c'est-à-dire «mieux porté par le langage», quand l'enseignant s'exprime ainsi (on laisse le lecteur imaginer ce que fait le doigt au moment où chacun des noms de nombre est prononcé) : «1», «*et-encore-1, 2*», «et-encore-1, 3».
Enfin, la forme la plus explicite qui soit est celle où, comme dans la comptine des cubes, le nom de

l'unité est prononcé : «1 cube; et-encore-1, 2 cubes; et-encore-1, 3 cubes»… En effet, dans l'expression «3 cubes», par exemple, la syntaxe de ce petit groupe nominal fait que le mot 3 réfère à une pluralité, il n'est pas un numéro.

Des comptines pour aider à comprendre le principe de l'itération de l'unité

Grâce à la pratique régulière de jeux et de comptines qui exercent le passage d'un nombre à un autre, le PE encourage les élèves à comprendre que les nombres consécutifs sont liés parl'itération de l'unité (trois, c'est deux et encore un). Au départ, l'accent est mis sur les tout petits nombres de 1 à 4. Après quatre ans**,** les comptines déclenchent des activités de décomposition et recomposition sur des quantités jusqu'à dix.

Les lapins copains Un petit lapin sur le chemin Rencontre un autre petit lapin. Deux petits lapins sont devenus copains. Deux petits lapins sur le chemin Rencontrent un autre petit lapin. Trois petits lapins sont devenus copains. Trois petits lapins sur le chemin Rencontrent un autre petit lapin. Quatre petits lapins sont devenus copains. Quatre petits lapins sur le chemin Rencontrent un autre petit lapin J'ai cinq doigts sur ma main Pour compter lespetits lapins. Un, deux, trois, quatre, cinq !	**Cinq pommes dans mon panier** Cinq pommes dans mon panier J'en croque une, Il n'en reste que quatre Quatre pommes… Trois pommes… Deux pommes… Une pomme dans mon panier Je la croque, je la croque, Il n'en reste plus, Je les ai toutes croquées !
Voici ma main Voici ma main Elle a cinq doigts En voici deux En voilà trois Voici ma main Elle a cinq doigts En voici quatre Et un tout droit.	Quatre chats gris Trois gros chats gris et un petit. Les quatre chats sont dans mon lit. Pouah, je n'en veux pas, partez d'ici coquins de chats gris !

Entre deux et quatre ans, des comptines portant sur la décomposition et la recomposition des petites quantités sont souvent proposées pour stabiliser la connaissance des petits nombres jusqu'à cinq.

Des comptines pour apprendre la suite orale des mots-nombres ordinaux

Pour communiquer la position d'un objet dans une file organisée, un élève doit connaître la suite orale des mots-nombres ordinaux (premier/première, deuxième, troisième…). Pour cela, il doit définir un point de départ (origine), un sens de parcours, c'est-à-dire donner un ordre.

Il existe encore peu de comptines permettant de travailler cet objectif, la plus connue est « *Les poules* ». Elle permet de repérer un ordre selon un ordre spatial et peut être jouée avecles élèves pour leur faire comprendre que le sens du rang est fondamental pour déterminer quelle poule est la première.

Les poules

Quand trois poulesVont aux champsLa première va devant.La deuxième suit la première.La troisième va derrière.Quand trois poulesVont aux champsLa première va devant.

Si par exemple, un élève veut communiquer la position de la voiture rouge dans la file qu'il aréalisée avec des voitures, il doit pouvoir dire que la voiture rouge est en troisième position.

Focus - Résoudre des problèmes d'ajout ou de retrait : un exemple de mise en œuvre en classe

Ce qui est attendu des élèves en fin d'école maternelle :

- Commencer à résoudre des problèmes d'ajout ou de retrait.
- Dire combien il faut ajouter ou enlever pour obtenir des quantités ne dépassant pas dix.

Situations-repères pour observer les progrès des élèves :

La programmation de cycle est élaborée en prenant appui sur les éléments de progressivité proposés dans le document ressource «*Observer et évaluer à l'école maternelle : domaine 4*» publié en mars 2023 sur le site Eduscol.

Choix d'un problème de référence

Dans cet exemple, le «*problème des chevaux*», est le problème de référence commun à l'ensemble des classes de l'école. L'enseignant dispose d'un jouet constitué d'une ferme à l'intérieur de laquelle on peut installer des figurines de chevaux. Les élèves ne peuvent pas voir son contenu quand elle est fermée. Le PE place, par ex., cinq figurines de chevaux dans la ferme puis en ajoute deux autres (ou en retire deux) en montrant chaque fois les quantités de chevaux qui y sont placés et en verbalisant : «*J'ai cinq chevaux dans ma ferme, j'en rajoute encore deux (ou j'en retire deux). Combien y a-t-il de chevaux dans ma ferme maintenant*?»

Eléments de progressivité : variables didactiques, procédures possibles et problèmes proposés :

Utiliser le nombre pour résoudre des problèmes d'ajout ou de retrait : tableau p. 98.
A partir de 3 ans : quantités jusqu'à 4.
A partir de 4 ans : quantités jusqu'à 8.
A partir de 5 ans : quantités jusqu'à 10.

Evaluer pour suivre les progrès des élèves

Dès la conception de la séquence, l'enseignant élabore une grille d'observation qui lui permet de suivre les progrès de chaque élève. Cette évaluation positive, ainsi menée par l'observation puis l'interprétation des progrès au fil des situations aménagées, permet au PE, en visant les attendus de fin de GS, d'adapter les activités et tâches proposées en fonction des besoins de chaque enfant pour qu'il continue à progresser au sein du groupe.

La grille d'observation permet d'évaluer si l'élève réussit à utiliser :

- **Des procédures de dénombrement** : perception immédiate des quantités ou comptage des chevaux, des bouchons ou des chevaux représentés sur un dessin, comptage sur les doigts.
- **Des procédures de surcomptage (ou de décomptage)** : sur les doigts, sur un dessin, en s'appuyant sur des écritures chiffrées ou sur la file numérique, mentalement.
- **Des stratégies proches du calcul, plus ou moins explicitées et formalisées** : appui sur les faits numériques mémorisés, appui sur le principe d'itération de l'unité, procédure proche du calcul mental (ex : « *4 et encore 1 cela fait 5 et encore 1 cela fait 6* »).

Un exemple de progression utilisée en classe (p. 101)

Cette progression concerne les problèmes de transformation de collections où une transformation additive ou soustractive s'opère. La quantité initiale de la collection et la transformation sont connues. Les élèves doivent chercher la quantité finale après la transformation. Les quantités impliquées dans les problèmes sont adaptées aux connaissances des élèves.

Organisation des temps d'entraînement

Les situations d'apprentissage liées à la résolution de problèmes seront répétées autant que nécessaire; elles contribuent à constituer une première mémoire de problèmes et à installer une première culture de la résolution de problèmes. **L'objectif est de permettre à un élève découvrant un nouveau problème de pouvoir réaliser des analogies d'un problème qu'il a déjà résolu** (ici le «problème des chevaux») **et de mobiliser les procédures permettant de le résoudre**. Lors des séances d'entraînement, les élèves sont amenés à résoudre des problèmes d'ajout ou retrait avec recherche de l'état final d'abord dans le contexte du problème de référence puis dans des contextes variés («jeu de la boîte», problème des oiseaux sur une branche…).

Exemples d'activités et de problèmes proposés

Jeux à deux dans l'espace mathématiques

Objectif : amener les élèves à multiplier les expériences de résolution de problèmes et à mémoriser des résultats additifs.

Jeu en autonomie : les élèves jouent à deux avec le matériel. Un élève invente un problème. Son camarade cherche le résultat. La validation est effectuée à l'aide du matériel.

Dictée à l'adulte : une séance de dictée à l'adulte est organisée pour rédiger un énoncé de problème inventé par les élèves. Cet énoncé est communiqué à une autre classe dans le cadre d'un échange régulier autour des mathématiques (dans le cadre de la liaison GS/CP par ex.).

Le jeu de la boîte

Objectif : amener les élèves à réinvestir, dans un nouveau contexte, les procédures utilisées pour résoudre le problème des chevaux.

Séances d'entraînement et rituels : le jeu de la boîte est proposé dans le cadre des séances d'entraînement puis en tant qu'activité ritualisée.

Exemple : «*J'ai six jetons dans ma boîte. Je retire un jeton. Maintenant, combien y a-t-il de jetons dans ma boîte*?».

Jeu à deux : quand les élèves se sont bien appropriés le jeu, ils y jouent à deux en autonomie.

Le problème « *les oiseaux sur la branche* »

Objectif : amener les élèves à découvrir ou renforcer les procédures de surcomptage et notamment celle prenant appui sur la file numérique.

Exemple de problème : «*Il y a quatre oiseaux sur la branche. Trois oiseaux viennent se poser sur la branche. Combien y a-t-il d'oiseaux sur la branche maintenant*?»

Le but n'est pas d'enseigner aux élèves de l'école maternelle (ni à ceux de l'école élémentaire) une classification formelle de problèmes basiques telle qu'elle peut être présentée dans des recherches en didactique des mathématiques, mais d'amener les élèves à reconnaître progressivement différents problèmes pouvant relever des structures additives et multiplicatives et d'automatiser les procédures à mettre en œuvre.

Importance des moments de synthèse, d'institutionnalisation et de réactivation

Lors des moments de synthèse et d'institutionnalisation, l'enseignant s'attache à faire expliciter les procédures des élèves. Quand il le juge possible, l'enseignant hiérarchise ces procédures en prenant en compte leur efficacité et leur économie afin de montrer qu'elles ne se valent pas toutes. Au cours de son parcours, l'élève est passe progressivement de procédures de dénombrement (manipulation effective des objets, comptage un à un sur les doigts ou sur un dessin) à l'utilisation des procédures se rapprochant du calcul.

L'enseignant organise des retours réguliers sur les découvertes et acquisitions antérieures pour s'assurer de leur stabilisation. Il prend appui sur les outils collectifs les plus adaptés à l'âge des élèves. Cette activité est l'occasion d'un rappel de connaissances antérieures sur lesquelles s'appuyer, de mises en relation avec des situations différentes déjà rencontrées ou de problèmes similaires posés au groupe.

Les boîtes à problèmes : un moyen de remobiliser les acquis

Certaines écoles ont choisi de concevoir des boîtes à problèmes pour garder la mémoire des problèmes de référence rencontrés dans les classes. Ces boîtes contiennent tout le matériel nécessaire pour pouvoir rejouer le problème (chevaux, ferme, bouchons). Une photo collée sur le couvercle de la boîte permet aux élèves d'identifier le problème de référence qu'ils pourront à nouveau investir.

L'affichage

L'affiche constitue un écrit de référence du vécu commun de la classe : il doit être lisible, clair, succinct et surtout construit avec les élèves. L'affiche met en lumière la ou les procédures les plus efficaces découvertes au cours des séances d'apprentissage. Les affiches collectives correspondent aux problèmes de référence rencontrés. Pour l'élève, l'affiche fournit un point d'appui, un aide-mémoire des procédures. Elle permet de se repérer dans la hiérarchie de procédures et de franchir les étapes du cheminement dans lequel il s'est inscrit.

Pour l'enseignant, elle constitue un support pour formaliser, guider le raisonnement des élèves, et favoriser les analogies avec les problèmes antérieurs. Elle constitue une référence essentielle dans les phases d'entraînement («*c'est comme le problème de*…»). L'affichage de classe évolue au cours de l'année au fur et à mesure que des procédures plus efficaces sont découvertes pour un même type de problème.

En résumé

- Une programmation efficace pour l'apprentissage du nombre doit prendre en compte ses trois principales utilisations : **le nombre pour exprimer les quantités (fonction cardinale), le nombre pour désigner un rang, une position (fonction ordinale), et enfin le nombre pour résoudre un problème.**
- **L'enseignement du nombre en tant que quantité s'appuie sur** la perception visuelle, la correspondance terme à terme, le comptage de un en un et la désignation orale des quantités ainsi que sur la comparaison de quantités, les décompositions et recompositions à partir d'objets manipulables, de représentations analogiques et diverses représentations symboliques, dont l'écriture chiffrée des nombres.
- **L'apprentissage de la fonction ordinale nécessite la connaissance des mots désignant des positions** qui ne sont pas les mêmes que ceux utilisés pour désigner les quantités.
La comparaison de positions nécessite de savoir désigner les positions en utilisant la suite numérique orale des nombres cardinaux. Il est donc nécessaire **d'avoir déjà compris le nombre en tant que quantité avant d'aborder le nombre en tant que position**.
- **L'enseignement de la résolution de problèmes** s'appuie sur des **problèmes numériques** portant sur des **nombres en tant que quantité** (composition de deux collections, ajout ou retrait à une collection, produit ou partage) ou sur **des nombres en tant que position** (déplacements en avant ou en arrière).
- L'enseignement du nombre mobilise et articule les **quatre modalités spécifiques d'apprentissage de l'école maternelle** : apprendre en jouant ; apprendre en réfléchissant et en résolvant des problèmes concrets ; apprendre en s'exerçant ; apprendre en se remémorant et en mémorisant.
- Privilégier **les jeux symboliques et de société** avec les élèves permet de proposer des situations évolutives afin de consolider les apprentissages mathématiques à travers **l'imitation, la manipulation et l'observation.**

IV. DE L'ÉCOLE MATERNELLE À L'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE : LE NOMBRE DANS LE CADRE DE LA CONTINUITÉ GS-CP

Favoriser la continuité du parcours d'apprentissage entre la GS/CP vise à sécuriser l'entrée au CP de chaque élève. L'accompagnement vers le CP est assuré par les enseignants de GS et de CP et se construit autour d'un double enjeu :
- la **liaison** entre les écoles, les PE, les élèves et les familles. Elle se construit à travers des visites, des échanges d'actions et de travaux pédagogiques communs, des rencontres avec les parents afin de sécuriser la relation avec les familles et rassurer l'enfant dans ses premiers pas à l'école élémentaire.
- **la continuité pédagogique** qui vise à coordonner les contenus et les méthodes d'apprentissage pour éviter les ruptures dans le parcours d'apprentissage de l'élève. La continuité des apprentissages est renforcée par une harmonisation pédagogique qui se construit autour de deux axes de réflexion :
- un axe collectif : outils, matériels, procédures, progressions, programmations.
- un axe individuel : acquis de l'élève, réussites et points d'attention.

Les apprentissages du CP s'appuient sur ceux construits en GS. Il s'agit de mobiliser des situations vécues en maternelle (situations de référence, jeux, affichages…). Elles sont efficaces car ont été régulièrement exploitées en GS et font sens.
Les évaluations nationales de début de CP sont un levier d'analyses et d'actions pour les PE de GS et CP afin d'ajuster leurs enseignements et répondre aux besoins de chaque élève.

La construction du nombre

À l'école maternelle, les élèves ont appris que **l'unité permet de passer d'un nombre au suivant ou au nombre précédent** : «*Trois c'est deux et encore un*». Ils ont commencé à construire **la fonction cardinale et ordinale du nombre**. Ils ont **utilisé des nombres pour résoudre des problèmes**. Ce travail contribue à la construction progressive du système décimal, avec **la construction de ladizaine, qui est un des principaux objectifs du CP avec le passage du dénombrement au calcul.** Les propositions suivantes sont formulées à partir des attendus de fin de CP. Le PE s'inscrit dans la continuité des situations proposées à la maternelle. Il accompagne l'élève de GS pour aller des compétences qu'il a acquises en fin de cycle 1 aux compétences attendues en fin de CP.

Les faits numériques : comprendre et utiliser des nombres entiers pour dénombrer, ordonner, repérer, comparer

Les faits numériques sont les résultats de calculs mémorisés disponibles immédiatement. Les recherches sont unanimes sur l'importance de cette mémorisation pour l'apprentissage du calcul. Les faits numériques jouent un rôle essentiel dans la mesure où ils soulagent la mémoire de travail des élèves. Une fragilité dans la connaissance de ces faits numériques a des répercussions négatives surles performances ultérieures en mathématiques. Il est donc indispensable de les enseigner, d'accompagner les élèves dans leur mémorisation à travers différents dispositifs (jeux, rituels, …).
Le travail de décomposition, de recomposition des nombres, des compléments à dix mené en maternelle **constitue une base essentielle** dans la mémorisation des faits numériques qui deviendront des automatismes chez les élèves.
Les jeux tels que Lucky Luke, Greli-Grelo favorisent la mémorisation des faits numériques. La contrainte de rapidité y contribue. Ce type de jeux a vocation à être poursuivi en CP sous différentes formes. Dans le jeu deLucky-Luke on peut par ex. demander d'écrire la décomposition sur une ardoise à l'aide de notations symboliques, de choisir une décomposition en associant deux cartes représentant des nombres sous différentes représentations, ajouter des contraintes (pas de nombre 1 dans la décomposition proposée pour des nombres supérieurs à 3, proposer deux décompositions pour un même nombre, …). Le jeu Lucky Luke en début de CP permet d'assurer une continuité avec des pratiques de GS ainsi que de conforter des acquis et des automatismes concernant les décompositions d'un nombre. Pour aller au-delà de dix, ce jeu laisse progressivement la place à d'autres tels que **Greli Grelo ou le jeu du saladier**.

Le jeu des allumettes pour construire l'aspect décimal de la numération

Le PE prend une grosse boîte d'allumettes qu'il renverse. Les élèves s'organisent pour déterminer combien il y a d'allumettes. Les élèves font des propositions de comptage de un en un, degroupements par deux, par cinq et par dix. En GS, la réponse attendue est *«il y a dix paquets de dix allumettes*».
Attendus de fin d'année de CP :
- Il dénombre des collections en les organisant.
- Il dénombre des collections en utilisant des groupements par dix.
- À partir d'un cardinal donné, il constitue des collections en utilisant des groupements par dix.

Au CP, l'élève peut nommer la quantité 100. Il doit pouvoir répondre à une commande à partir d'un cardinal donné. Il constitue des collections en effectuant des groupements par dix pour répondre à des commandes telle que «*Donne-moi 45 allumettes*». Cette activité de commande fait l'objet d'un travail tout au long du cycle 2 pour comprendre l'aspect décimal de la numération. Au CP, l'élève doit comprendre, par ex., que «quarante-cinq» équivaut à «quatre dizaines et cinq unités», à «10 + 10 + 10 + 10 + 5», à «40 + 5».

Résoudre des problèmes : utiliser des nombres entiers et le calcul

À l'école maternelle, les élèves ont déjà été confrontés à des problèmes additifs, soustractifs, multiplicatifs et de partage. Ils ont compris qu'il est possible de prévoir la quantité d'objets obtenus puis de l'exprimer par un seul nombre. Les situations d'apprentissage proposées sont alors vécues par les élèves : ils manipulent pour trouver une solution, ils verbalisent leurs procédures et valident leurs solutions à l'aide du matériel. L'enjeu du CP est de faire passer les élèves de procédures de dénombrement sur des collections à des procédures de calcul. «*Une étape déterminante, emblématique* *de l'enseignement des mathématiques au CP par rapport à la maternelle, se situe dans le passage d'une procédure de dénombrement (comptage, sur comptage ou décomptage) à la traduction de celle-ci en termes d'écritures additives (7 + 5 = 12) ou soustractives (12 − 7 = 5). Cette étape suppose notamment que l'élève donne du sens à ces écritures par la mobilisation de faits numériques reconstruits puis progressivement mémorisés.*» Guide mathématiques CP.

Des situations de référence pour assurer la continuité GS/CP et amorcer le calcul

Attendus de fin d'école maternelle :
Commencer à résoudre des problèmes de composition de deux collections, d'ajout ou de retrait, de produit ou de partage (les nombres en jeu sont tous inférieurs ou égaux à 10).
Attendus de fin de CP :
Il résout des problèmes du champ additif (addition et soustraction) en une ou deux étapes.
Il modélise ces problèmes à l'aide de schémas ou d'écritures mathématiques.
Il connaît le sens des signes - et +.
Le PE du CP conduit ses élèves vers davantage d'abstraction : usage des signes – et + non utilisés en maternelle, modélisation à partir d'un énoncé. Alors qu'en GS l'élève utilise le dessin, il tend vers une schématisation. Le champ numérique va passer de nombres allant jusqu'à 10 à des nombres allant jusqu'à 100. Si la progressivité des apprentissages doit être de mise, cela ne signifie pas pour autant qu'il faut évacuer la pratique de la manipulation et du dessin. Pour aller plus loin, se référer au guide « *Pour enseigner les nombres, le calcul et la résolution de problèmes au CP* » (pages 82-85).

Exemples de problèmes pour assurer la continuité et la progressivité des apprentissages

Situation : les roues des véhicules
En GS : le PE annonce avoir huit roues dans une malle opaque. «*Combien peut-on équiper de motos ?* ». «*Combien peut-on équiper de voitures* ?». Avec 10 roues, combien peut-on équiper de voitures et de motos ?
En CP : le PE annonce avoir dix-huit roues dans une malle opaque. «*Combien peut-on équiper de motos ?*», « *Combien peut-on équiper de voitures ?* » « *Combien peut-on équiper de voitures et de motos ?* »

Situation : une assiette pour chaque poupée
Les évaluations nationales de début de CP pour la partie résolution de problèmes proposent les situations suivantes : «*Il y a cinq chiens et trois os. Combien d'os faut-il ajouter pour que chaque chien ait un os*?» «*C'est la récréation. Huit élèves veulent un vélo. La maîtresse n'a sorti que deux vélos. Combien de vélos doit-elle encore sortir pour que chaque élève ait un vélo*?» En GS, le PE fait travailler la correspondance terme à terme, compétence prédictive pour résoudre des problèmes additifs ou soustractifs. En manipulant et en verbalisant, l'élève associe une assiette à chaque poupée. Le PE donne la consigne suivante : «*Va chercher juste ce qu'il faut d'assiettes pour que chaque poupée ait une assiette*.» La situation évolue ensuite : «*J'ai cinq poupées et trois assiettes. Combien manque-t-il d'assiettes pour que chaque poupée ait une assiette ?* ». Cette situation travaillée, formalisée et structurée à la maternelle permet aux élèves de disposer des procédures utiles pour résoudre la situation des chiens ou des vélos lors de l'entrée au CP.

Le jeu de la boîte
Pour ce qui est de la progression sur les nombres, la situation de la boîte, déjà vécue en GS, est proposée d'abord avec des nombres allant au moins jusqu'à 20 en période 1.
Pour ce qui est de la progression sur les types de problèmes, la situation de la boîte est proposée dès le début de CP dans des situations d'ajout et de retrait de jetons, avec recherche de la quantité finale. Ensuite, elle évoluera vers des problèmes parties-tout avec recherche. Pour aller plus loin, se référer au guide « *Pour enseigner les nombres, le calcul et la résolution de problèmes au CP* » (p. 52-54).

BIBLIOGRAPHIE p. 117.